Las probabilidades y sus aplicaciones a la estadística

Prof. Dgo. Almendras

(Continuación)

Función generadora de momentos.—Al tratar la distribución binomial se definió el momento de orden p mediante la fórmula:

$$m_p = \sum x^p p_x \quad \text{en que } x = 0, 1 \ldots n$$

En una distribución cualquiera, dependiente de una sola variable x_i y cuya frecuencia es f_i, el momento de orden p se define por la relación:

$$m_p = \sum x_i^p P_i \,, \quad \text{siendo } P_i = \frac{f_i}{F} \,; \quad F = \Sigma f_i \,; \quad i = 1,2 \ldots n$$

Si ponemos,

(1) $\quad M(x,t) = \Sigma\, e^{tx_i} P_i$ vemos que la derivada de orden p es:

(2) $\quad M^{(p)}(x,t) = \sum e^{tx_i} x_i^p\, p_i; \; M(x,o) = 1$

Para $t = O$ se tiene:

(3) $$m_p = M^{(p)}(x,O)$$

Es decir, «las derivadas sucesivas de la función $M(x,t)$, para $t = O$, determinan todos los momentos de la distribución». La función $M(x,t)$ se llama «función generadora de momentos» y se abreviará su designación por *f. g. m.*

La *f. g. m* de la distribución binomial será:

$$M(x,t) = \sum e^{tx} C_n^x\, p^x q_{n-x}; = 0,l, \ldots n$$

(4) $$M(x,t) = (p\,e^t + q)^n$$

De la definición de la *f. g. m.* se deducen las dos relaciones siguientes:

$$M(x+c,t) = e^{ct} M(x,t) \tag{5}$$

$$M(ax,t) = M(x,\theta), \text{ siendo } at = \theta \tag{6}$$

En esta última relación, para obtener los momentos relativos a la variable ax hay que hacer las derivadas de $M(x, \theta)$, tomando en cuenta la relación $at=\theta$.

De la relación (5), tomando la derivada de orden n se tiene:

$$D^{(n)} M(x+c,t) = e^{ct} (D+c)^n M(x,t) \tag{7}$$

Si el origen se tralada al valor medio m, tendremos:

$$x'_i = x_i - m; \quad y \quad M(x',t) = M(x_i - m,t) = e^{-mt} M(x,t)$$

Los momentos con respecto al origen en el punto de abscisa m se obtendrán derivando $M(x', t)$ con respecto a t y luego poniendo $t=0$. De acuerdo con (7) tendremos:

$$D^{(n)} M(x',t) = e^{-mt} (D-m)^n M(x,t) \tag{7'}$$

Desarrollando el segundo miembro y haciendo $t=0$, tenemos:

$$\mu_p = m_p - \binom{p}{1} m\, m_{p-1} + \binom{p}{2} m^2 m_{p-2} + \cdots + (-1)^p m^p \tag{8}$$

Si la distribución es binomial $m=np$ y $M(x, t)=(p\,e^t + q)^n$, luego la función generadora de momentos con origen en m es:

$$M(x',t) = e^{-mt} (p\,e^t + q)^n \tag{9}$$

Partiendo de (9) por deiivación sucesiva con respecto a t y luego haciendo $t=0$ se obtienen los momentos:

$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = npq$$
$$\mu_3 = npq\,(q-p)$$

Ejemplo.—En la distribución binomial determinar la *f, g. M.* de la variable x/n y los momentos con respecto a su valor medio.

De la relación (6) tenemos:

$$M(x/n, t) = M(x, \theta)\ ; \ t/n = \theta$$

$$M'(x/n, t) = M'(x, \theta) \cdot \frac{1}{n}$$

$$M''(x/n,t) = M''(x, \theta) \cdot \frac{1}{n^2}$$

Para $t=0$ se tiene $\Theta=0$ y las derivadas $M'(x, \Theta)$ y $M''(x, \Theta)$ se reducen a los momentos m_1 y m_2 de la variable x cuyos valores son:

$$m_1 = np$$
$$m_2 = npq + n^2p^2$$

Luego tendremos:

$$m_1(x/n) = p$$

$$m_2(x/n) = (npq)/n^2 - p^2 = \frac{pq}{n} + p^2$$

$$\text{var} \cdot \frac{x}{n} = \frac{pq}{n}$$

Variables aleatorias independientes .—F. g. m de la suma de variables independientes.

Veamos algunos ejemplos de variables aleatorias independientes.

1.er Ejemplo.—Supongamos dos urnas U_1 y U_2 que contienen; la primera 3 bolitas blancas y 2 negras y la segunda 2 blancas y 5 negras y hagamos la experiencia de sacar una bolita de cada una.

Se comprende que si entre las urnas U_1 y U_2 no hay ninguna relación de orden físico, la probabilidad de sacar una bolita de U_1 no tendrá ninguna influencia en la probabilidad de salida de una bolita de U_2; del mismo modo, si se hacen n_1 extracciones de una bolita y con reposición en U_1, la probabilidad de que x de ellas sean blancas no tendrá ninguna relación con la probabilidad de que al hacer n_2 extracciones de una bolita y con reposición en U_2, y de ellas sean blancas. Decimos en este caso que las variables aleatorias x e y son independientes.

2.° Ejemplo.—Si se tienen dos fábricas A y B en las cuales trabajan N_1 y N_2 obreros y si se toman como variables sus salarios, es evidente que al tomar un salario al azar de la fábrica A, la probabilidad de extraerlo no influirá en la probabilidad de extracción de un obrero de la fábrica B. En relación a la forma de extracción de un salario de A y otro de B podemos decir que ellos son independientes entre sí.

En los dos ejemplos anteriores si las variables son x e y y las probabilidades de que x tome un valor x_i e y el valor y_j son P_{1i} y P_{2j}, respectivamente, entonces, en una experiencia, como las indicadas anteriormente, la probabilidad de que simultáneamente sea $x=x_i$ e $y=y_j$, será $P_{1i}\,P_{2j}$, y, es evidente, que la probabilidad de que una función cualquiera $f(x, y)$ tome el valor $f(x_i, y_j)$ será también $P_{1i}\,P_{2j}$.

Entre las funciones $f(x, y)$, en estadística, es de gran importancia $x+y$, con respecto a la cual tenemos el siguiente teorema:

Teorema.—La función generadora de momentos de la suma de dos o más variables aleatorias independiente es igual al producto de sus *f. g. m*, respectivas.

Demostración.—Sean

$$M_1(x,t) = \sum e^{tx}P_{1i}; \; M_2(y,t) = \sum e^{ty}P_{2j}$$

La *f. g. m* de la suma $x+y$ será:

$$M_3 (x + y,t) = \sum e^{t(xi + yj)} P_{1i} P_{2j}$$

Puesto que la sumatoria en este segundo miembro se puede realizar independientemente en relación a i y j, se tendrá:

$$M_3 (x + y,t) = \sum e^{tx_i} P_{1i} \sum e^{ty_j} P_{2j}$$

$$M_3 (x + y,t) = M_1 (x,t) \cdot M_2 (y,t) \tag{10}$$

Esta relación permite encontrar los momentos de la variable aleatoria $x+y$.

(*Continuará*)