Aplicación del Transform de Laplace a las ecuaciones del oscilador simple

Por Jaime Michelow V.

Se trata de abordar las ecuaciones diferenciales que aparecen en el movimiento de un oscilador simple por métodos operacionales, métodos que ofrecen las siguientes ventajas:

a) Las constantes de integración quedan inmediatamente, y en forma natural, ligadas a las condiciones iniciales;

b) El método para abordar cualquiera ecuación diferencial lineal tenga o no segundo miembro, y siendo este segundo miembro de una forma cualquiera, es completamente uniforme; y

c) El método, si se dispone de tablas de transform y antitransform con las respectivas fórmulas fundamentales, es completamente algebraico.

I.—Oscilación libre.

m masa concentrada en el extremo; *K* rigidez de la estructura

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -Ky,$$

$$\frac{K}{m} = p^2$$

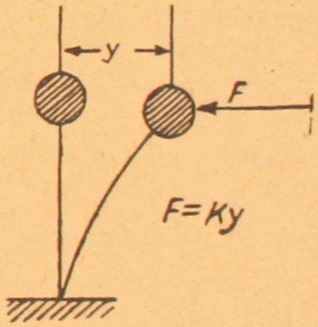

Fig. 1

$y'' + p^2y = 0$ Ecuación lineal muy conocida que resolveremos por el L

$$Ly'' + p^2Ly = 0$$

$$s^2Ly - sy_0 - y'_0 + p^2Ly = 0$$

$$Ly = \frac{sy_0 + y'_0}{s^2 + p^2} = y_0\frac{s}{s^2+p^2} + \frac{y'_0}{p}\frac{p}{s^2+p^2} \text{ Aplicando } L^{-1}$$

1) $$y = y_0 \cos pt + \frac{y'_0}{p} \operatorname{sen} pt$$

El esfuerzo de corte V es igual a

K y

2) $$V = y_0 K \cos pt + \frac{y'_0 K}{p} \operatorname{sen} pt$$

II.—Oscilación con una fuerza perturbadora

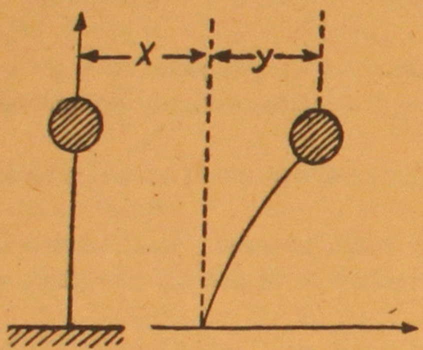

Fig. 2

Supongamos que la base del oscilador esté dotada de un cierto movimiento tal que se conoce su aceleración en cualquier instante. (Por ejemplo, acelerograma de un temblor).

$$m \frac{d^2 (x+y)}{dt^2} = -K y$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t) \text{ aceleración basal conocida.}$$

$$y'' + p^2 y = -f(t)$$

Aplicando L

$$Ly'' + p^2 Ly = -Lf(t)$$

$$s^2 Ly - sy_0 - y'_0 + p^2 Ly = -Lf(t)$$

$$Ly = \frac{sy_0 + y'_0}{s^2+p^2} - \frac{Lf(t)}{s^2+p^2}$$

Apliquemos L^{-1}

$$L^{-1} \frac{sy_0 + y'_0}{s^2+p^2} = y_0 \cos pt + \frac{y'_0}{p} \operatorname{sen} pt.$$

ecuación 1)

$$L^{-1} \frac{1}{p} \frac{Lf(t)\, p}{s^2+p^2} = \frac{1}{p} \int_0^t f(z) \operatorname{sen} p(t-z)\, dz$$

Teorema de Borel.

Luego:

3) $$y = y_0 \cos pt + \frac{y'_0}{p} \operatorname{sen} pt - \frac{1}{p}\int_0^t f(z) \operatorname{sen} p\,(t-z)\,dz$$

Constituyendo los dos primeros términos la oscilación libre y la integral la oscilación forzada. En un temblor $y_0 = 0$ $y'_0 = 0$

4) $$y = -\frac{1}{p}\int_0^t f(z) \operatorname{sen} p\,(t-z)\,dz$$

(Integral de Duhamel)

El esfuerzo de corte $V = Ky$ y sin tomar en cuenta el signo

5) $$V = \frac{K}{p}\int_0^t f(z) \operatorname{sen} p\,(t-z)\,dz$$

Como vemos, teniendo el acelerograma de un temblor podemos perfectamente avaluar la integral por métodos numéricos o gráficos.

III.—Oscilación con una fuerza perturbadora y un amortiguamiento viscoso.

Se llama amortiguamiento viscoso una fuerza contraria al movimiento y proporcional a la velocidad. Fig. 2.

$$F_1 = c\frac{d(x+y)}{dt}$$

c coeficiente de amortiguamiento o simplemente amortiguamiento.

$$m\frac{d^2(x+y)}{dt^2} = -Ky - c\frac{d(x+y)}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t)$$

$$\varphi(t) = \int_a^t f(t)\,dt + \varphi(0)$$

$$my'' + cy' + Ky = -mf(t) - c\varphi(t)$$

$$\frac{c}{m} = 2\gamma$$

$$\frac{K}{m} = p^2$$

$$-m\,f(t) - c\,\varphi(t) = m\,F(t)$$

$$y'' + 2\gamma y' + p^2 y = F(t)$$

En algunas aplicaciones se considera un amortiguamiento proporcional a $\frac{dy}{dt}$ o sea se hace $\varphi(t) = 0$ quedando $F(t) = -f(t)$

Aplicando L:

$$Ly'' + 2\gamma Ly' + p^2 Ly = L\,F(t)$$

$$s^2 Ly - sy_0 - y'_0 + 2\gamma sLy - 2\gamma y_0 + p^2 Ly = L\,F(t)$$

$$Ly = \frac{L\,F(t) + sy_0 + y'_0 + 2\gamma y_0}{s^2 + 2\gamma s + p^2}$$

Se pueden presentar dos casos según si el denominador tiene raíces reales o imaginarias.

El segundo caso es más importante y se verifica para:

$$\gamma^2 - p^2 < 0$$

$$\gamma < p$$

$$\frac{c}{2m} < \sqrt{\frac{K}{m}}$$

6) $c < \sqrt{Km}$

El valor $2\sqrt{Km}$ se llama amortiguamiento crítico, el porqué de esta denominación lo veremos más adelante.

En estas condiciones podemos escribir:

$s^2 + 2\gamma s + p^2 = (s+\gamma)^2 + \lambda^2$ en que

$$\lambda^2 = p^2 - \gamma^2 > 0$$

Luego:

$$Ly = \frac{1}{\lambda}\frac{L\,F(t)\,\lambda}{(s+\gamma)^2+\lambda^2} + y_0\frac{s+\gamma}{(s+\gamma)^2+\lambda^2} + \frac{y'_0+\gamma y_0}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{(s+\gamma)^2+\lambda^2}$$

Aplicando L^{-1}:

7) $$y = y_0 e^{-\gamma t}\cos\lambda t + \frac{y'_0 + y_0\gamma}{\lambda} e^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}\,\lambda t + \frac{1}{\lambda}\int_0^t F(z)\, e^{-(t-z)\gamma}\,\mathrm{sen}\,\lambda(t-z)\,dz$$

Supongamos $y_0 = 0 \quad y'_0 = 0$ (temblor)

8) $$y = \frac{1}{\lambda}\int_0^t F(z)\, e^{-(t-z)\gamma}\,\mathrm{sen}\,\lambda(t-z)\,dz$$

El esfuerzo de corte:

$$V = Ky + cy' + c\varphi(t)$$

y' lo obtenemos derivando 8) o aplicando L en la ecuación diferencial y despejando Ly' lo que con $y_0 = 0$ $y'_0 = 0$ nos daría:

$$Ly' = L\,F(t)\left[\frac{s+\gamma}{(s+\gamma)^2+\lambda^2} - \frac{\gamma}{\lambda}\,\frac{\lambda}{(s+\gamma)^2+\lambda^2}\right] \text{ aplicando } L^{-1}$$

$$y' = \int_0^t F(z)\,e^{-\gamma(t-z)}\cos\lambda\,(t-z)\,dz - \frac{\gamma}{\lambda}\int_0^t F(z)\,e^{-\gamma(t-z)}\operatorname{sen}\lambda\,(t-z)\,dz$$

Luego:

$$9)\quad V = c\varphi(t) + \int_0^t F(z)\,e^{-\gamma(t-z)}\left[\frac{K-\gamma c}{\lambda}\operatorname{sen}\lambda\,(t-z) + c\cos\lambda\,(t-z)\right]dz$$

Para valores mayores que el amortiguamiento crítico:

$s^2 + 2\gamma s + p^2 = (s-s_1)\,(s-s_2)$ en que s_1 y s_2 son reales

$$Ly = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} + C\,\frac{L\,F(t)}{s-s_1} + D\,\frac{L\,F(t)}{s-s_2} \qquad \text{A, B, C, D constantes}$$

$$10)\qquad y = A\,e^{s_1 t} + B\,e^{s_2 t} + \int_0^t F(z)\left[C\,e^{s_1(t-z)} + D\,e^{s_2(t-z)}\right]dz$$

El movimiento deja de ser vibratorio, de aquí el nombre de amortiguamiento crítico.