Ing. José Léniz Cerda

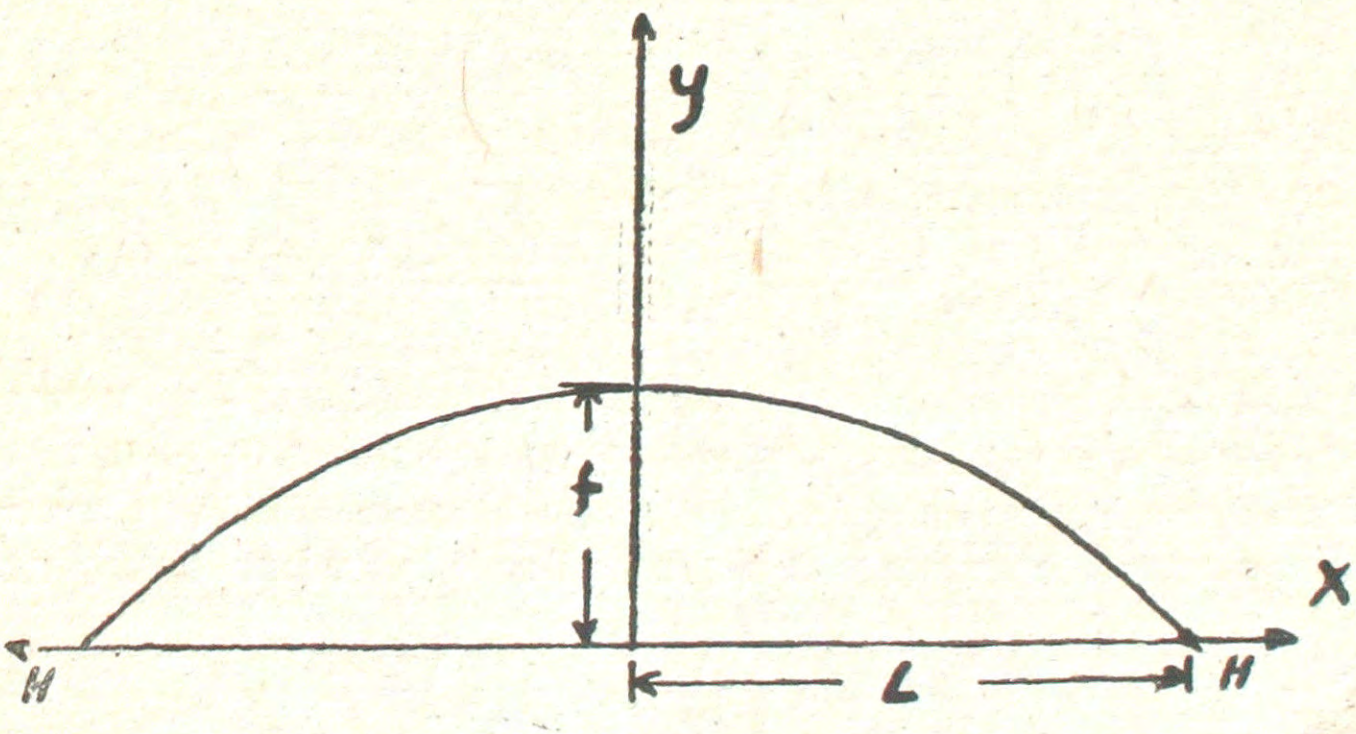
Consideraciones sobre cálculo de techumbres en arcos

GENERALIDADES

Estas consideraciones se refieren en especial a algunas simplificaciones en el cálculo y proyecto de arcos de sección uniforme y carga vertical repartida uniformemente en el largo; caso que es el que se presenta en las techumbres en arcos. Aunque algunas de estas ideas son fácilmente ampliables a otras condiciones de empotramiento, aquí sólo considero los arcos biarticulados.

Generalmente se adopta como eje del arco la parábola. Esto corresponde a considerar el polígono antifunicular como tal, lo que sólo será exacto si las cargas verticales fuesen uniformemente repartidas en su proyección horizontal.

La deducción de un eje tal que siga exactamente el antifunicular respectivo, nos lleva a una catenaria.



DEMOSTRACION

$$\frac{dM'}{dx} = V \qquad \frac{dV}{dx} = -q \qquad \frac{d^2M'}{dx^2} = -q$$

Siendo M′ los momentos isostáticos que se producirían en el arco al suponer una de las rótulas como móvil. V es el esfuerzo de corte y q la carga por unidad de proyección horizontal.

$$q = p \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$ siendo p la carga por unidad de largo del arco.

Podemos plantear la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2M'}{dx^2} = -p \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Los momentos reales en cada punto una vez consideradas ambas rótulas fijas están dados por: $M = M' - Hy$, siendo H la reacción horizontal.

Si ponemos como condición que el eje coincida con el antifunicular, significará que los momentos serán nulos y entonces:

$$M = M' - Hy = 0 \qquad M' = Hy$$

$$\frac{dM'}{dx} = H \frac{dy}{dx} \qquad \frac{d^2M'}{dx^2} = H \frac{d^2y}{dx^2}$$

Tendremos por último planteada la ecuación definitiva:

$$H \frac{d^2y}{dx^2} = -p \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

La integración de esta ecuación con determinación de las constantes por las condiciones de que en el origen $y = f \;\; \frac{dy}{dx} = O$ nos lleva a:

$$y = f - \frac{H}{2p}\left(\frac{p_x}{eH} + \frac{p_x}{eH} - 2\right)$$

o también usando las funciones hiperbólicas y haciendo $\frac{H}{p} = R$:

1.—) $$y = f - R\left(\cosh \frac{X}{R} - 1\right)$$

Vemos que en esta ecuación de la curva del arco tenemos el valor $R = H/p$ que está determinado por el valor de la reacción hiperestática horizontal.

Para determinar esta magnitud, apelamos a la otra condición de la curva aun no impuesta: $x = L$ cuando $y = 0$, lo que nos lleva a la siguiente ecuación:

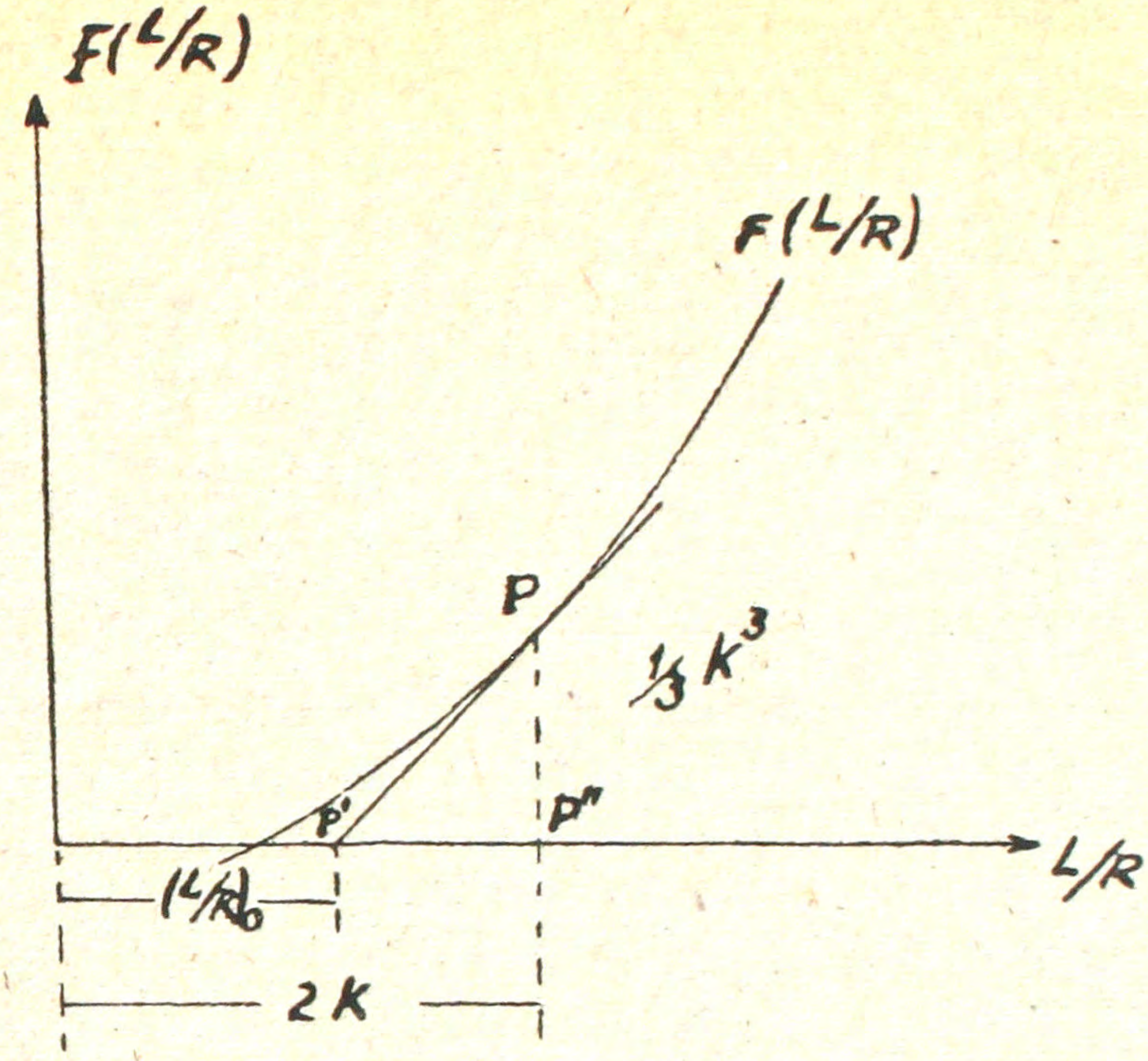
2.—) $$F\left(\frac{L}{R}\right) = \cosh\left(\frac{L}{R}\right) - \frac{f}{L}\left(\frac{L}{R}\right) - 1 = 0$$

La dificultad para resolver esta ecuación directamente es insalvable, por lo que usamos métodos aproximados.

Si desarrollamos en serie la función cosh (L/R) y tomamos los dos primeros términos, podemos despejar $L/R = 2f/L$, o, haciendo $f/L = K$, $\frac{L}{R} = 2\,K$.

Si tomamos los tres primeros términos, lo que ya puede dar gran precisión tendremos la ecuación 2.—) transformada en:

$$F\left(\frac{L}{R}\right) = \frac{L}{2R} + \frac{L^3}{24R^3} - K = 0$$



Buscaremos ahora el valor que toma esta función $F\left(\frac{L}{R}\right)$ para $L/R = 2K$; encontramos el punto P de la curva en la fig. 2, cuyas coordenadas son $(2K, K^3/_3)$.

Basados en el punto P averiguamos el valor de la tangente a la curva $F(L/R)$:

$$F(L/R) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{L}{R}\right)^2, \text{ que, para el valor } L/R = 2K$$

$$\text{vale: } F(2K) = \frac{1}{2} + \frac{K^2}{2}$$

Conociendo esta tangente y el lado PP'', no es difícil buscar el valor P'P'' que será la corrección necesaria a $L/R = 2K$ para tener un valor $(L/R)_0$ ya muy aproximado:

$$\left(\frac{L}{R}\right)_0 = 2K - \frac{\dfrac{K^3}{3}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}K^2}$$

o bien, simplificando: $$\left(\frac{L}{R}\right)_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{K(3 + 2K^2)}{1 + K^2}$$

Para calcular el valor R basta esta expresión, con extraordinaria precisión; sin embargo, para trazar la curva puede desearse mayor exactitud, pues se puede encontrar que, calculado el valor de y, cuando $x = L$, no llegue exactamente a O. Luego, aunque basta la expresión anterior para anteproyectos, en proyectos definitivos es recomendable afinar más el cálculo en la siguiente forma:

Se calculan las expresiones:

$$e = \cosh (L/R)_o - k\,(L/R)_o - 1$$
$$a = \operatorname{senh} (L/R)_o - k$$

y se puede tener que (L/R) exacto es: $\left(\frac{L}{R}\right) = \left(\frac{L}{R}\right)_o - \frac{e}{a}$

ESQUEMA DE USO:

Todo el cálculo de cargas verticales se reduce ahora a:

1.—Calcular el valor de $k = f/L$ siendo f la flecha y L la mitad de la luz.

2.—Calcular $(L/R)\,o = \frac{2}{3}\,\frac{K\,(3 + 2\,K^2)}{1 + K^2}$ en que $R = H/p$ y que basta para anteproyectos o para determinaciones de H, no así para trazar curvas en proyectos definitivos.

3.—Corregir $(L/R)_0$ calculando las expresiones:

$$e = \cosh \left(\frac{L}{R}\right)_o - k \left(\frac{L}{R}\right)_o - 1$$
$$a = \operatorname{senh} \left(\frac{L}{R}\right)_o - k$$

y obteniendo (L/R) por:

$$L/R = (L/R)_o - \frac{e}{a}$$

4.—El valor de la reacción horizontal es $H = p \cdot R$

5.—Conocido el valor de R, se dibuja la curva por puntos.

OTRAS INCOGNITAS:

Conocida la forma del arco, necesitamos conocer otras incógnitas para dimensionar distintos elementos:

Reacción vertical:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{senh}\left(\frac{X}{R}\right)$$

$$ds = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{X}{R}\right)}\,dx = \cosh\left(\frac{X}{R}\right) dx$$

$$S = \int_0^L \cosh\left(\frac{X}{R}\right) dx = R\operatorname{senh}\left(\frac{L}{R}\right)$$

$$V = pR \operatorname{senh}\left(\frac{L}{R}\right) = pL\,\frac{\operatorname{senh}\left(\frac{L}{R}\right)}{\frac{L}{R}}$$

No teniendo esta medida una importancia determinante se puede simplificar la expresión reemplazando $L/R = 2k$ y desarrollando en serie

$$V = pL\left(1 + \frac{2}{3} k^2\right)$$

La compresión normal es máxima en los apoyos, variando a lo largo del arco entre los límites H y $N_{máx.}$

$$N^2_{máx.} = H^2 + V^2 \therefore N_{máx.} = H \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{L}{R}\right)}$$

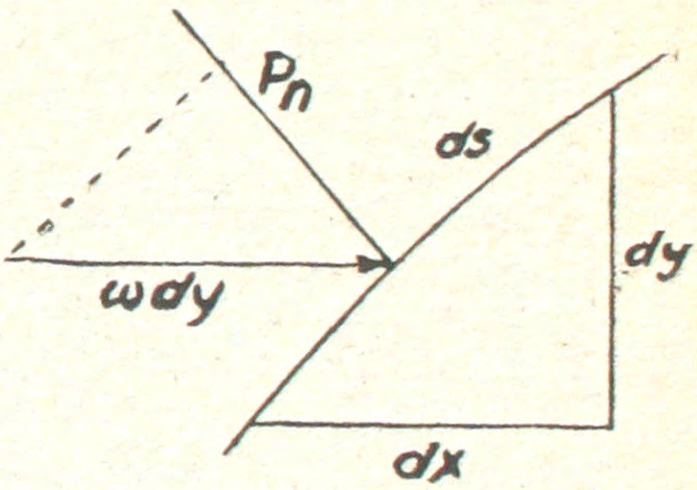
$$N_{máx.} = H\cosh\left(\frac{L}{R}\right) \qquad N_{máx.} = pL \frac{\cosh\left(\frac{L}{R}\right)}{\frac{L}{R}}$$

Desarrollando en serie y aproximando a $L/R = 2k$:

$$N_{máx.} = pL \frac{1 + k^2}{2\,k}$$

CALCULOS DE VIENTO EN TECHUMBRES INCLINADAS

Diversas Hipotesis



La acción del viento sobre una estructura es de tal modo complicada por factores difíciles de apreciar, que aún no se han puesto de acuerdo los ingenieros sobre las hipótesis bases de cálculo.

Las hipótesis más simples han sido siempre el descomponer la fuerza horizontal wdy que actúa sobre el elemento ds en dos fuerzas: una paralela a ds que se supone inactiva, y otra P_n normal a la superficie. Esta descomposición teórica tiene como consecuencia el que la única fuerza activa es una normal a la superficie e igual a:

$$dP_n = w \cdot dy \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

Otra hipótesis, basada en experiencias que dice que la anterior fórmula falla por defecto, acepta que $P_n = wdy$, sólo girada hasta hacerse normal a la superficie.

Ahora, la forma de considerar para el cálculo estas fuerzas inclinadas es descomponerlas en verticales y horizontales.

La primera hipótesis dice:

$$dP_r = wdy\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$
$$dP_H = wdy\underline{\operatorname{sen}^2} \varphi$$

La segunda hipótesis dice:

$$dP_r = wdy\cos \varphi$$
$$dP_H = wdy\underline{\operatorname{sen}} \varphi$$

Siendo la acción horizontal la más especial pues el efecto de la otra vertical es de la misma índole de las otras cargas verticales, son las fuerzas dP_H las más importantes. De las expresiones anteriores vienen los nombres de "$\text{sen}^2\varphi$" y de "$\text{sen}\varphi$" que se dan a dichas hipótesis.

De las experiencias siempre se ha deducido que la fórmula del "$\text{sen}\varphi$" peca por exceso donde la fórmula del "$\text{sen}^2\varphi$" peca por defecto.

Es indudable que una hipótesis acertada tendrá que ser intermedia entre las dos anteriores. Muchas se han propuesto, entre las más modernas están:

$$\text{Duchemin: } P_n = wdy \frac{2 \text{ sen } \varphi}{1 + \text{sen}^2 \varphi}$$

$$\text{Hutton } P_n = wdysen \varphi (1{,}84 \cos \varphi - 1)$$

y otra de uso muy extendido en EE. UU. $P_n = wdy \dfrac{\varphi}{45^\circ}$

Estas fórmulas están llevadas a un gráfico en el que en abcisas se lleva el peralte relativo de arcos y en ordenadas el aumento que el uso de cada fórmula significa sobre la fórmula del "$\text{sen}^2\varphi$". En el mismo gráfico se dibuja una curva que trata de promediar estas tres fórmulas propuestas.

Nuestra Hipótesis

Expuesto el estado actual de las discusiones sobre la forma de interpretar la acción del viento, puedo proponer un sistema de cálculo propio, cuya aplicación acertada en arcos paso a demostrar en seguida.

Consiste en considerar la acción del viento como la acción simple de las fuerzas horizontales wdy sin descomponer dicha fuerza.

Demostración

Conocidas las formas de los diagramas de momentos de viento, en las diversas hipótesis, y el grado de aproximación que la incertidumbre de las hipótesis básicas exigen, puede aceptarse que los diagramas son casi semejantes. Como la mitad contraria al viento no tiene acción de fuerzas debe tener un diagrama de momentos lineal, ya que el momento isostático en cada punto será igual a la reacción vertical por su brazo.

De lo anterior, se deduce que dos diagramas serán prácticamente congruentes si las reacciones verticales en el lado opuesto son iguales.

El sistema de demostración que a continuación seguiremos, será calcular la reacción vertical isostática en el caso de la hipótesis simplificada que proponemos y en el caso de la hipótesis del $\text{sen}^2\varphi$

$$\text{Hipótesis propuesta: } dV = wdy \frac{y}{2L} = \frac{\omega}{2L} ydy$$

$$V \int_0^f \frac{\omega}{2L} ydy = \frac{\omega f^2}{4L} \qquad V = \frac{\omega f^2}{4L}$$

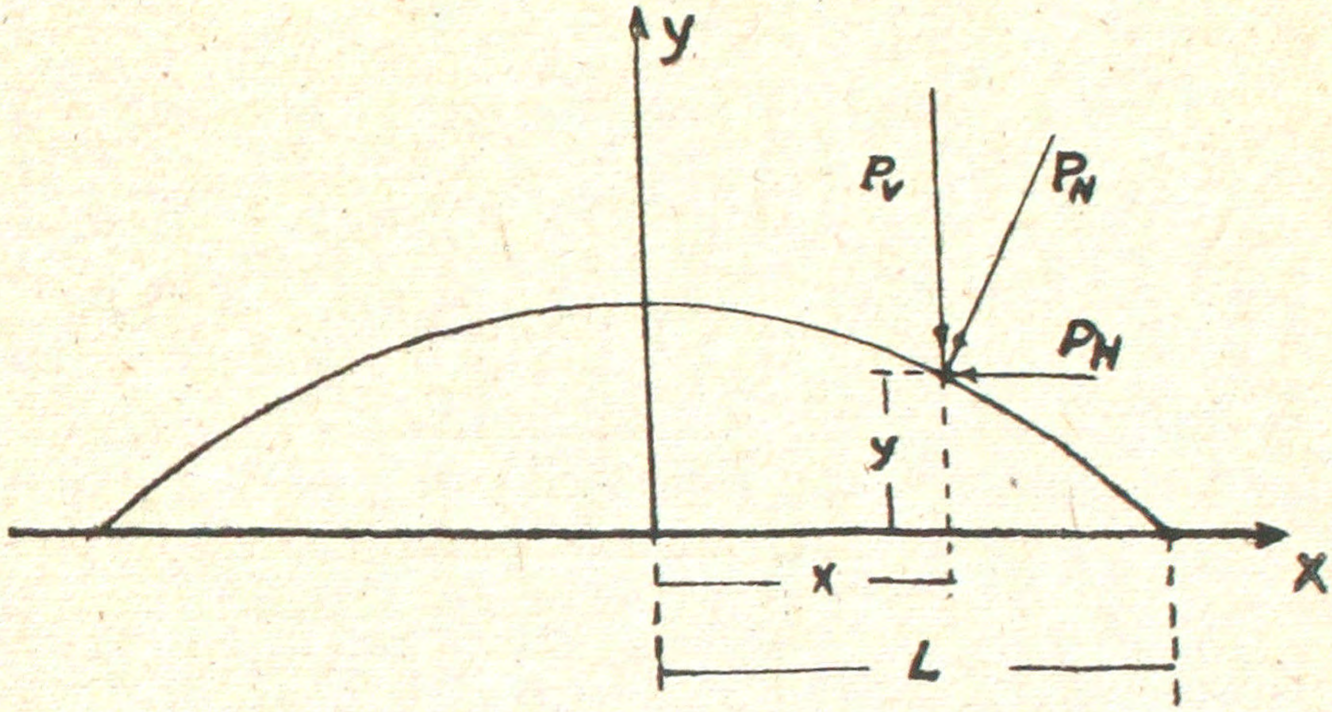
Hipótesis teórica del $\operatorname{sen}^2\varphi$:

$$P_H = P\operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$P_v = P\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

$$dP_H = w\operatorname{sen}^2 \varphi \, dy \qquad dP_v = w\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, dy$$

Usaremos como arco la catenaria por avenirse mejor a nuestra demostración:



Las fórmulas que corresponden a un arco de eje de catenaria son:

$$y = f - R \left(\cosh \frac{x}{R} - 1\right)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = - \operatorname{senh} \frac{x}{R}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\cosh \frac{x}{R}}$$

$$\operatorname{sen} \varphi = - \operatorname{tgh} \frac{x}{R}$$

$$dV = \frac{\omega}{2L} \operatorname{sen}^2 \varphi \, ydy + \frac{\omega}{2L} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, (L-x) \, dy$$

$$= \frac{\omega}{2L} (\operatorname{sen}^2 \varphi \, ydy + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, (L-x) \, dy)$$

Sabiendo que $\qquad dy = \operatorname{tg} \varphi \, dx$

$$dV = \frac{\omega}{2L} (\operatorname{sen}^2 \varphi \, ydy + \operatorname{sen}^2 \varphi \, (L-x) \, dx)$$

Para poder integrar lo haremos por partes en la siguiente forma:

$\alpha = \int \operatorname{sen}^2 \varphi \; ydy \qquad \beta = L \int \operatorname{sen}^2 \varphi \; dx \qquad \gamma = \int x\operatorname{sen}^2 \varphi \; dx$

Empezaremos por integrar α. De las fórmulas conocidas sabemos que:

$$\operatorname{sen} \varphi = - \operatorname{tgh} \frac{x}{R}$$

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \operatorname{tgh}^2 \left(\frac{x}{R}\right)$$

$$R \left(\cosh \frac{x}{R} - 1\right) = f - y \qquad \cosh \frac{x}{R} - 1 = \frac{f - y}{R}$$

$$\cosh \frac{x}{R} = 1 + \frac{f - y}{R}$$

$$\operatorname{tgh} \frac{x}{R} = \frac{\sqrt{\cosh^2 \left(\frac{x}{R}\right) - 1}}{\cosh \frac{x}{R}}$$

$$\operatorname{tgh}^2 \left(\frac{x}{R}\right) - \frac{\cosh^2 \left(\frac{x}{R}\right) - 1}{\cosh^2 \left(\frac{x}{R}\right)} = \frac{2 \frac{f - y}{R} + \left(\frac{f - y}{R}\right)^2}{\left(1 + \frac{f - y}{R}\right)^2} = \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$\alpha = \int_0^f \frac{2 R (f - y) + (f - y)^2}{R^2 + (f - y) (2R + f - y)} ydy$$

$$\alpha = \int \frac{(f - y) (2R + f - y)}{R^2 + (f - y) (2R + f - y)} ydy$$

$$\alpha = \int_0^f \frac{y^2 + 2y (f + R) + (f + R)^2 - R^2}{[y - (f + R)]^2} ydy$$

$$\alpha = \int_0^f \frac{[y - (f + R)]^2 - R^2}{[y - (f + R)]^2} ydy$$

$$\alpha = \int_0^f ydy - R^2 \int_0^f \frac{ydy}{[y - (f + R)]^2} =$$

$$\alpha = \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^f - R^2 \left| \frac{-(f + R)}{y - (f + R)} + \log [y - (f + R)] \right|_0^f$$

$$\alpha = \frac{f^2}{2} - Rf + R^2 \log \left(1 + \frac{f}{R}\right)$$

$$\beta = L \int_0^L \operatorname{sen}^2 \varphi \, dx \qquad \operatorname{sen}^2 \varphi = \operatorname{tgh}^2 \left(\frac{x}{R}\right)$$

$$= L \int_0^L \operatorname{tgh}^2 \left(\frac{x}{R}\right) dx = LR \int_0^L \operatorname{tgh}^2 \left(\frac{x}{R}\right) d\left(\frac{x}{R}\right)$$

$$= LR \left| \frac{x}{R} - \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{R}\right) \right|_0^L$$

$$\beta = L^2 - LR\operatorname{tgh}\left(\frac{L}{R}\right)$$

$$\gamma = \int_0^L x\operatorname{sen}^2 \varphi \, dx = R^2 \int_0^L \operatorname{tgh}^2\left(\frac{x}{R}\right) \cdot \left(\frac{x}{R}\right) \cdot d\left(\frac{x}{R}\right)$$

$$= R^2 \left[\left(\frac{x}{R}\right)\left(\frac{x}{R} - \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{R}\right)\right) - \int \left(\frac{x}{R}\right) d\left(\frac{x}{R}\right) + \int \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{R}\right) d\left(\frac{x}{R}\right)\right]$$

$$= R^2 \left| \left(\frac{x}{R}\right)\left[\frac{x}{2R} - \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{R}\right)\right] + \log\cosh\left(\frac{x}{R}\right) \right|_0^L$$

$$= \frac{L^2}{2} + R^2 \log\cosh\left(\frac{L}{R}\right) - RL\operatorname{tgh}\left(\frac{L}{R}\right)$$

Ahora, recordando que: $V = \frac{w}{2L}(\alpha + \beta - \gamma)$

$$V = \frac{w}{2L}\left[\left(\frac{f^2}{2} - Rf + R^2\log\left(1 + \frac{f}{R}\right) + L^2 - LR\operatorname{tgh}\left(\frac{L}{R}\right) - \frac{L^2}{2} - \right.\right.$$

$$\left. - R^2\log\cosh\left(\frac{L}{R}\right) + RL\operatorname{tgh}\left(\frac{L}{R}\right)\right]$$

$$V = \frac{w}{2L}\left(\frac{f^2}{2} - Rf + \frac{L^2}{2} + R^2\log\frac{1 + \frac{f}{R}}{\cosh\left(\frac{L}{R}\right)}\right)$$

Llamamos $V_{teór}$ a esta reacción isostática que se produciría según la hipótesis del $\operatorname{sen}^2\varphi$.

$$V_{teór} = \frac{wf^2}{4L} - \frac{w}{2L}\left(Rf - \frac{L^2}{2} - R^2\log\frac{1 + \frac{f}{R}}{\cosh\frac{L}{R}}\right)$$

En esta expresión $1 + \frac{f}{R} = \cosh\left(\frac{L}{R}\right)$ pues $\frac{f}{R} = \left(\frac{L}{R}\right)\frac{f}{L}$ y $1 + \left(\frac{L}{R}\right)\frac{f}{L} = \cosh\left(\frac{L}{R}\right)$ que es la ecuación básica que nos da el valor de $\frac{L}{R}$ en la deducción de la catenaria, luego:

$$V_{te\acute{o}r} = \frac{wf^2}{4L} - \frac{w}{2L}\left(Rf - \frac{L^2}{2}\right)$$

Si llamamos $\frac{wf^2}{4L} = V_{simpl}$ $\quad V_{te\acute{o}r} = V_{simpl}\left(1 - 2\frac{R}{f} + \frac{1}{K^2}\right)$

Dando a $\frac{L}{R}$ el valor $\left(\frac{L}{R}\right)_0 = \frac{2\,k\,(3 + 2\,k^2)}{3\,(1 + k^2)}$

$$V_{te\acute{o}r} = V_{simpl}\,\frac{2\,(k^2 + 1)}{3 + 2k^2}$$

Y, por último, recordando que los momentos son prácticamente proporcionales a las reacciones isostáticas:

$$M'_{simpl} = \frac{3 + 2k^2}{2\,(k^2 + 1)}\,M'_{te\acute{o}r}.$$

o si llamamos $\delta = \frac{3 + 2k^2}{2\,(k^2 + 1)}$

$$M'_{simpl} = \delta\,M'_{te\acute{o}r}$$

En el gráfico adjunto, donde habíamos dibujado los aumentos sobre las fuerzas teóricas del "sen²" que significan otros más modernos, llevamos este factor δ y observamos que es una curva semejante a la término medio con un aumento de 10%.

Resumen

El considerar la hipótesis que proponemos significa calcular con la fórmula de Hutton aumentada en 20%, o, en general, con un aumento medio de 10% sobre el promedio de las hipótesis más modernas.

Conclusion

En arcos, la acción del viento debe considerarse como una presión horizontal igual a la presión del viento por la proyección vertical de cada elemento. Con esto se tendrá un 10% de mayor seguridad sobre el uso de las fórmulas más modernas y un aumento medio de 40% sobre la fórmula del $\text{sen}^2\varphi$.

INFLUENCIA DEL VIENTO EN ARCOS PARABOLICOS

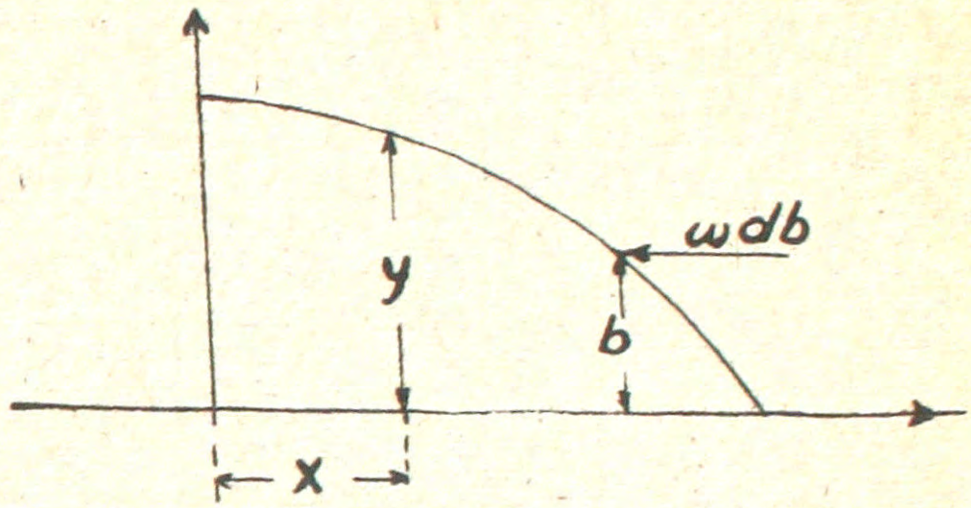
Observacion

La forma del arco es evidente que tiene una importancia relativamente pequeña en la influencia del viento para una luz y flecha determinados. En todo caso, las diferencias que podrían existir son menores que la que producen el uso de las diversas hipótesis sobre la acción del viento.

Calculo

Sea w′ la presión del viento sobre una superficie normal a su dirección.

Sea w la fuerza por unidad de proyección vertical sobre el arco. Si es d la distancia entre arcos:



$$w = d \cdot w'$$

Sean S y V las reacciones isostáticas que la suma de las fuerzas **w · db** producen.

$$S = wf \qquad V = \frac{wf^2}{4L}$$

El momento isostático en un punto (x,y,) está dado por la expresión:

$$M' = S \cdot y - V\,(L - x) - \int_0^y w\,(y - b) \cdot db$$

$$= w \cdot f \cdot y - \frac{wy^2}{2} = \frac{wf^2}{4}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$= w\left(x\,\frac{f^2}{4L} + y \cdot f - y^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,f^2\right)$$

Las fórmulas de la parábola son:

$$y = f - f\left(\frac{x}{L}\right)^2 \qquad y = f\left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right), \qquad \frac{dy}{dx} = -2k\left(\frac{x}{L}\right)$$

Reemplazando estos valores:

$$M' = \frac{wf^2}{4}\left[1 + \left(\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{x}{L}\right)^4\right]$$

Para encontrar la integral $\int M'yds$ y $\int y^2ds$, buscamos la expresión de **ds**.

Como se trata de dos integrales que se dividirán, el valor de $\underline{ds}$ no necesitará ser muy aproximado, tendremos de este modo:

$$\text{con exactitud: } ds = \sqrt{1 + 4k^2 \left(\frac{x}{L}\right)^2}\, dx$$

$$\text{aproximado: } ds = \left[1 + 2k^2 \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] dx$$

$$\int_0^L M'yds = \frac{Lwf^3}{4} \int \left[1 + \left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^4 + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{x}{L}\right)^6\right] d\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$+ \frac{Lwf^3 2k^2}{4} \int \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(\frac{x}{L}\right)^4 - \left(\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{x}{L}\right)^6 + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{x}{L}\right)^8\right] d\left(\frac{x}{L}\right)$$

Entre los límites tenemos:

$$\int_0^L M'yds = \frac{Lwf^3}{4} (0{,}803 + 0{,}306 \cdot k^2)$$

Esta integral es la correspondiente al lado del viento. En el lado opuesto el M' es lineal e igual a:

$$M' = wf^2/4L \cdot (L - x)$$

$$M' = wf^2/4 \cdot (1 - x/L)$$

$$\int M'yds = Lwf^3/4 \cdot \int [1-(x/L)-(X/L)^2+(x/L)^3]\, d(x/L) + Lwf^3 2k^2/4 \cdot \int [(x/L)^2$$

$$-(x/L)^3-(x/L)^4+(x/L)^6 d\left(\frac{x}{L}\right)$$

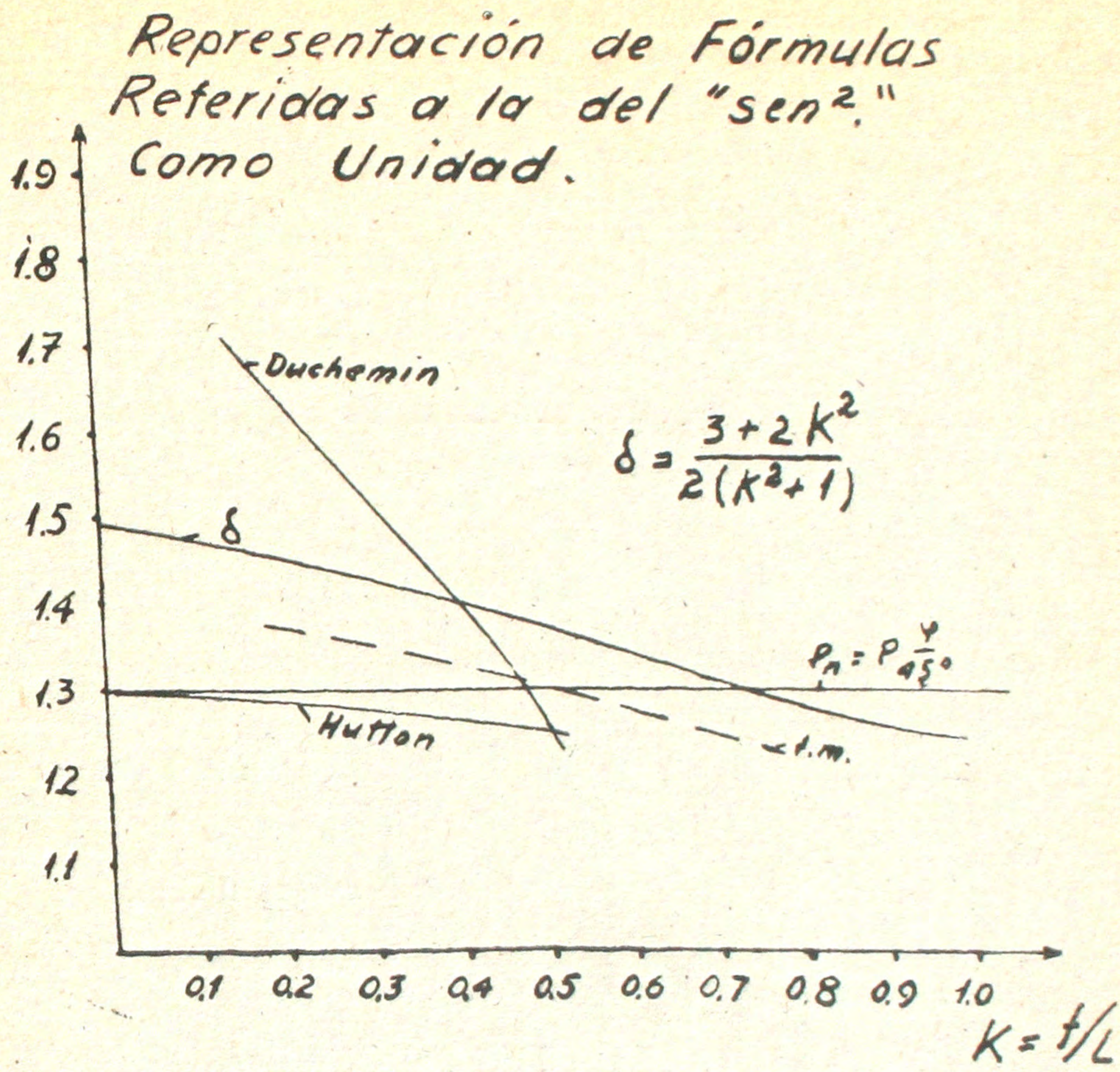
Entre los límites:

$$\int_0^L M'yds = \frac{wf^3L}{4} (0.417 + 0.100\, k^2)$$

La integral completa será:

$$\int_{-L}^{+L} M'yds = \frac{wf^3L}{4} (0{,}803 + 0{,}417 + 0{,}306 \cdot k^2 + 0{,}100\, k^2)$$

$$= \frac{wf^3L}{4} (1{,}22 + 0{,}406 \cdot k^2)$$



Para el cálculo de la integral: $\int y^2 ds$:

$$y^2 = f^2 \left(1 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right)$$

$$\int_0^L y^2 ds = f^2 L \int_0^L \left[1 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right] d\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$+ f^2 L 2k^2 \int_0^L \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^4 + \left(\frac{x}{L}\right)^6\right] d\left(\frac{x}{L}\right)$$

Entre sus límites: $\int_0^L y^2 ds = f^2 L \, (0{,}533 - 0{,}038 \cdot k^2)$

y la integral completa valdrá el doble:

$$\int_{-L}^{+L} y^2 ds = f^2 L \, (1{,}067 - 0{,}076 \cdot k^2)$$

El valor de la reacción horizontal H será:

$$H = \frac{\int M'yds}{\int y^2ds} = \frac{wf}{4} \cdot \frac{1{,}22 + 0{,}406 \cdot k^2}{1{,}067 - 0{,}076\ k^2}$$

o bien, llamando:

$$r = \frac{1{,}220 + 0{,}406 \cdot k^2}{1{,}067 - 0{,}076 \cdot k^2}$$

$$H = \frac{w \cdot f}{4} \cdot r$$

Una expresión muy aproximada de r sería: $r = 1{,}144 + 0{,}462 \cdot k^2$

Esta reacción H produce momentos negativos: $H \cdot y$

$$H \cdot y = \frac{r\ wf^2}{4} \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

y, por último, los momentos efectivos en el arco son:

$$M = \frac{wf^2}{4} \left\{1 + \left(\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{x}{L}\right)^4 - r \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\right\} \text{ lado del viento}$$

$$M = \frac{wf^2}{4} \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right) - r \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)\right] \text{ lado opuesto al viento.}$$

Los esfuerzos de corte son las derivadas de los momentos:

$$Q = -\frac{wf^2}{4L} \left(1 + 2\,r \cdot \left(\frac{x}{L}\right) - 8\left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \text{ lado del viento}$$

$$Q = \frac{wf^2}{4L} \left(2r\left(\frac{x}{L}\right) - 1\right) \text{ lado opuesto al viento}$$

Hay dos esfuerzos de corte máximos, uno positivo que se produce en el apoyo del lado del viento $\left(\frac{x}{L} = 1\right)$ y vale:

$$Q_{máx\ (+)} = \frac{wf^2}{4L} (7 - 2r)$$

Para encontrar el máximo esfuerzo de corte negativo (lado opuesto al viento):

$$\frac{dQ}{d\left(\frac{x}{L}\right)} = 0 \qquad -24\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2r = 0$$

$$\frac{x}{L} = \sqrt{\frac{r}{12}}$$

vale entonces:

$$Q_{máx\ (-)} = -\frac{wf^2}{4L}\left(1 + 0{,}387 \cdot r^{\frac{3}{2}}\right)$$

Tenemos dos momentos máximos, uno positivo en el lado del viento y otro negativo en el lado opuesto.

El $M_{máx\ (-)}$ se produce: $2r\left(\frac{x}{L}\right) - 1 = 0 \qquad \left(\frac{dM}{d\left(\frac{x}{L}\right)} = 0\right)$

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{2r}$$

y vale: $$M_{máx\ (-)} = \frac{wf^2}{4}\left(1 - r - \frac{1}{4r}\right)$$

El $M_{máx\ (+)}$ se produce:

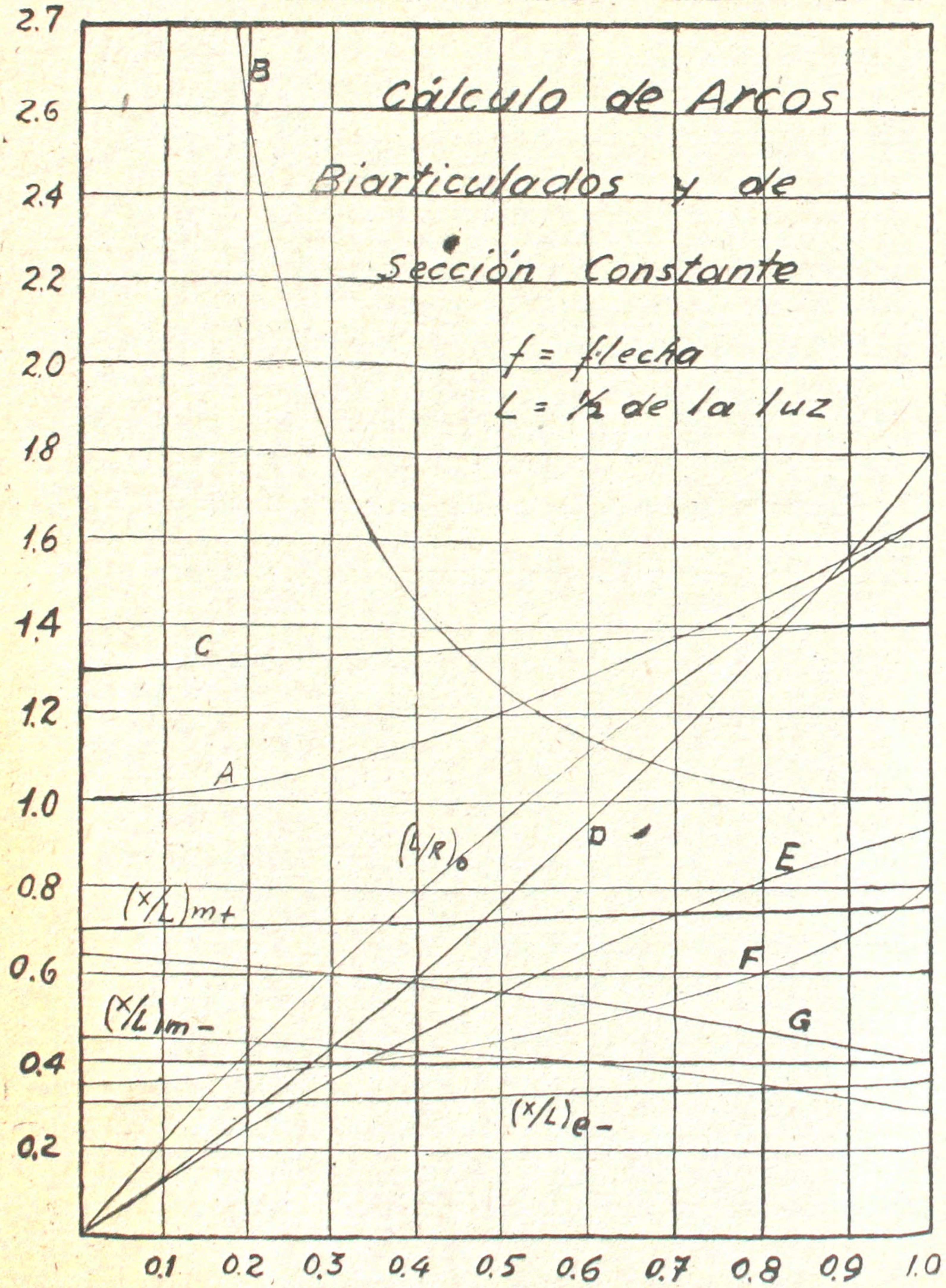
$$8\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2r\left(\frac{x}{L}\right) - 1 = 0$$

Aplicando la fórmula de Cardano para las ecuaciones cúbicas:

$\frac{x}{L} = 0{,}5\left(1 + \frac{r}{3}\right)$ luego $M_{máx\ (+)}$ vale:

$$M_{máx\ (+)} = \left(\frac{wf^2}{4}\right)(1{,}375 - 0{,}755r + 0{,}083r^2 + 0{,}009r^3)$$

Para facilitar aun más el empleo de estas fórmulas, se ha hecho un gráfico que ayuda en los cálculos en la siguiente forma:



1.—) $\left(\frac{L}{R}\right)_0$ está dado directamente por la curva: $\left(\frac{L}{R}\right)_0 = \frac{2\,k}{3}\,\frac{(3 + 2\,k^2)}{1 + k^2}$

2.—) $H = R \cdot p$ R sale del valor $(L/R)_0$

3.—) $V = p \cdot L \cdot A$ $A = 1 + \frac{2}{3}\,k^2$

4.—) $N = p \cdot L \cdot B$ $B = \frac{1 + k^2}{2k}$

5.—) $H_v = \frac{wf}{4} \cdot r$ $r = \frac{1{,}220 + 0{,}406 \cdot k^2}{1{,}067 - 0{,}076 \cdot k^2}$

H_v = reacción hiperestática por viento

6.—) $H'_v = \frac{wf}{4} \cdot C$ $C = \frac{1}{4}\,(4 + r)$ H'_v = reacción total horizontal.

7.—) $V_v = \frac{wf}{4} \cdot k$ $k = \frac{f}{L}$

8.—) $\left(\frac{x}{L}\right)_{e\,(-)} = \sqrt{\frac{r}{12}}$ Lugar en que se produce el esfuerzo de corte máx (–)

9.—) $Q_{máx\,(-)} = \frac{fw}{4} \cdot D$ $D = k\left(1 + 0{,}387\; r^{\frac{3}{2}}\right)$

10.—) $Q_{máx\,(+)} = \frac{wf}{4} \cdot E$ $E = \frac{1}{4} \cdot k\;(7 - 2r)$

11.—) $M_{máx\,(-)} = -\frac{wf^2}{4} \cdot F$ $F = 1 - r - \frac{1}{4r}$

12.—) $M_{máx\,(+)} = \frac{wf^2}{4} \cdot G$ $G = 1{,}375 - 0{,}75 \cdot r + 0{,}083 \cdot r^2 + 0{,}009 \cdot r^3$

13.—) $\left(\frac{x}{L}\right)_{m(-)} = \frac{1}{2\,r}$ Lugar en que se produce el momento máximo negativo.

14.—) $\left(\frac{x}{L}\right)_{m(+)} = 0{,}5\left(1 + \frac{r}{3}\right)$ Lugar en que se produce el máximo momento positivo.