Ing. Alberto Claro Velasco

Período de estructuras de puentes

1) *Introducción.*—El presente estudio tiene por objeto dar a conocer fórmulas, que creemos originales, para determinar el período propio de vibración de estructuras en marco rígido, de uso corriente en la construcción de Puentes, tales como el Pórtico Simple y el Pórtico Doble.

2) En la expresión conocida del período vibratorio

$$(1) \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$$

$m = \dfrac{P}{g}$ es la masa oscilante $\qquad g = 981$ cm/seg/seg.

c es la fuerza necesaria para que el recorrido de la masa oscilante sea 1 cm.

La ecuación 1) puede escribirse

$$(2) \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g.\,c}} = \frac{2\pi}{31.3}\sqrt{\frac{P}{c}} = s\,0,2\sqrt{\frac{P}{c}}$$

La relación (3) $\dfrac{P}{c} = \delta$ representa, pues, el desplazamiento δ debido a la fuerza P.

La expresión del período vibratorio se convierte en

$$(4) \qquad T = 0,2\sqrt{\delta}$$

Esta fórmula muestra que la determinación del período vibratorio de una estructura de puente se reduce a calcular el desplazamiento δ producido por una fuerza horizontal, actuando a la altura del tablero y de magnitud igual al peso P en kgs. de la superstructura. (Se acepta que el peso de la cepa misma sea despreciable comparado con el peso de la superstructura).

3) *Cálculo del desplazamiento δ.*

En el caso de estructuras sencillas, en que es conocida la curva de los momentos de flexión causados por una fuerza horizontal, el desplazamiento δ es fácil de obtener por la aplicación de los teoremas de Mohr:

$$\delta_O^L = \frac{1}{EI}\int_O^L M\,x\,dx$$

$$\theta_{OL} = \frac{1}{EI}\int_O^L M\,dx$$

como se indica en los ejemplos A) y B).

En el caso de estructuras complicadas es de recomendar la aplicación del método llamado «Slope Deflection». Ejemplos C) D) E).

En el ejemplo E) se muestra la aplicación del método al pórtico de dos pisos con travesaño a media altura y la fórmula (4) del período propio será también válida si el peso propio de la cepa y travesaño es despreciable comparado con el peso de la superstructura. Las fórmulas indican lo eficaz que resulta un travesaño para disminuir el período.

Ejemplo A.—Pieza empotrada abajo y libre arriba, sometida a una fuerza horizontal P en el extremo.

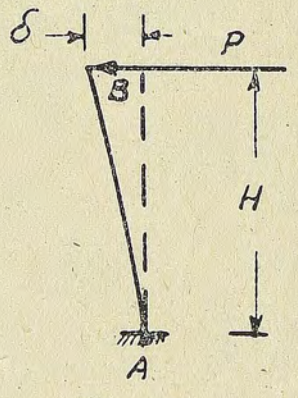


Fig 1

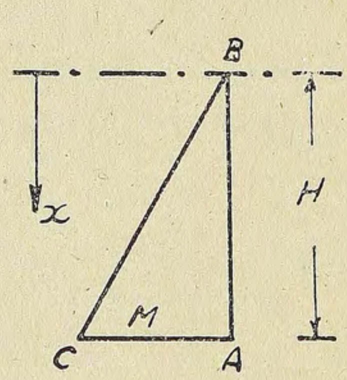


Fig. 2

La deformación

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_B^A M\,x\,dx$$

se obtendrá tomando momentos respecto al punto B del área de momentos A B C (fig. 2).

$$\int_B^A Mx\,dx = \frac{1}{2}M\cdot H\times\frac{2}{3}H = \frac{1}{3}MH^2$$

Se obtiene la fórmula bien conocida

$$\delta = \frac{1}{E\,I} \; \frac{PH^3}{3}$$

Ejemplo B.—Pórtico simple sometido a la acción de una fuerza horizontal P en el dintel.

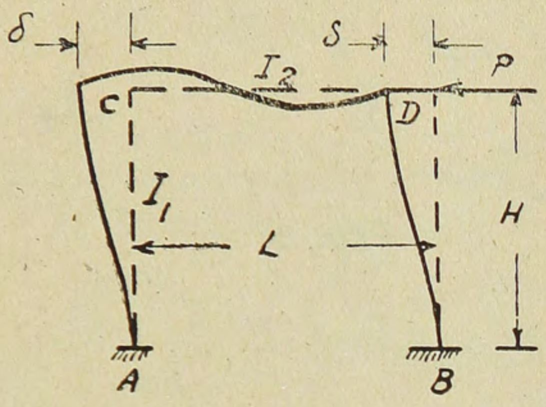


Fig 3.

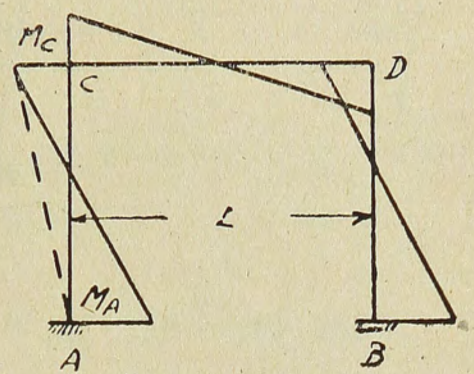


Fig. 4

$$x = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{H}{L}$$

$$\delta = \frac{1}{E\,I_1} \int_c^A Mx\,dx = \frac{1}{E\,I_1}\left[\frac{1}{2} M_c \cdot H \cdot \frac{H}{3} - \frac{1}{2} M_A \cdot H \cdot \frac{2}{3} H\right]$$

$$\delta = \frac{1}{E\,I_1}\left(M_c \cdot \frac{H^2}{6} - M_A \cdot \frac{H^2}{3}\right) = \frac{H^2}{6\,E\,I_1}\,(M_c - 2\,M_A)$$

siendo

$$FC = MC = \frac{PH}{2} \times \frac{3x}{6x+1}$$

$$AG = MA = \frac{PH}{2} \times \frac{3x+1}{6x+1}$$

$$M_c - 2M_A = -\frac{PH}{2} \cdot \frac{3x+2}{6x+1}$$

$$\delta = \frac{PH^3}{12\,E\,I_1} \times \frac{3x+2}{6x+1}$$

Ejemplo C.—Pórtico doble. (Caso general).

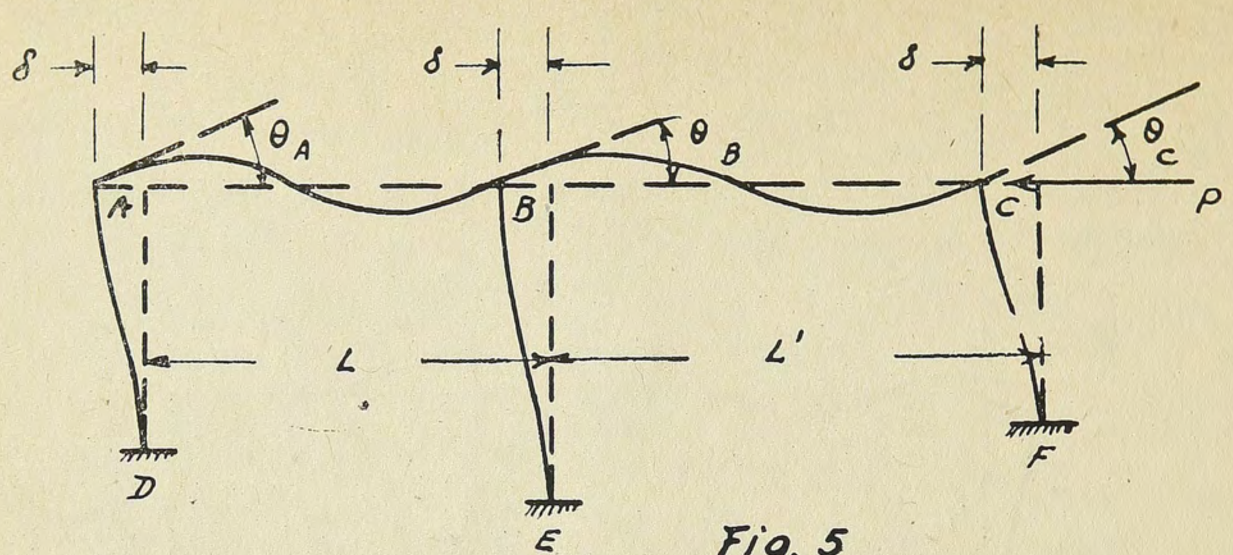


Fig. 5

Sean $H_A = AD \quad H_B = BE \quad H_C = CF$

$$k_{AD} = \frac{E.\,I_{AD}}{H_A} \quad k_{BE} = \frac{E.\,I_{BE}}{H_B} \quad k_{CF} = \frac{E.\,I_{CF}}{H_C}$$

$$k_{AB} = \frac{E.I_{AB}}{L} \quad k_{BC} = \frac{E.I_{BC}}{L'}$$

El método Slope Deflection permite escribir las siguientes ecuaciones de barras

$$M_{AD} = 2\,k_{AD}\left(\frac{3\delta}{H_A} - 2\,\theta_A\right)$$

$$M_{AB} = -2\,k_{AB}\,(2\,\theta_A + \theta_B)$$

$$M_{Bc} = -2\,k_{Bc}\,(2\,\theta_B + \theta_c)$$

$$M_{BE} = 2\,k_{BE}\left(\frac{3\delta}{H_B} - 2\,\theta_B\right)$$

$$M_{BA} = -2\,k_{AB}\,(2\,\theta_B + \theta_A)$$

$$M_{cB} = -2\,k_{BC}\,(2\,\theta_c + \theta_B)$$

$$M_{CF} = 2\,k_{CF}\left(\frac{3\delta}{H_c} - 2\,\theta_c\right)$$

$$M_{DA} = 2\,k_{AD}\left(\frac{3\delta}{H_A} - \theta_A\right)$$

$$M_{EB} = 2\,k_{BE}\left(\frac{3\delta}{H_B} - \theta_B\right)$$

$$M_{FC} = 2\,k_{CF}\left(\frac{3\delta}{H_C} - \theta_C\right)$$

Las ecuaciones de nudos

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0$$

dan tres ecuaciones entre las incógnitas $\theta_A - \theta_B - \theta_C - \delta$.

La cuarta ecuación necesaria se obtiene de la igualdad entre la fuerza horizontal P y la suma de los esfuerzos de corte en los pilares.

$$\frac{M_{AD} + M_{DA}}{H_A} + \frac{M_{BE} + M_{EB}}{H_B} + \frac{M_{CF} + M_{FC}}{H_C} = -P.$$

La fórmula que da el valor de δ es sumamente complicada y no es de interés práctico.

El ejemplo que sigue muestra la resolución de las ecuaciones, para el caso de pórtico doble con pilares de igual rigidez y tramos del mismo largo.

Ejemplo D.—Pórtico doble. (Caso particular)

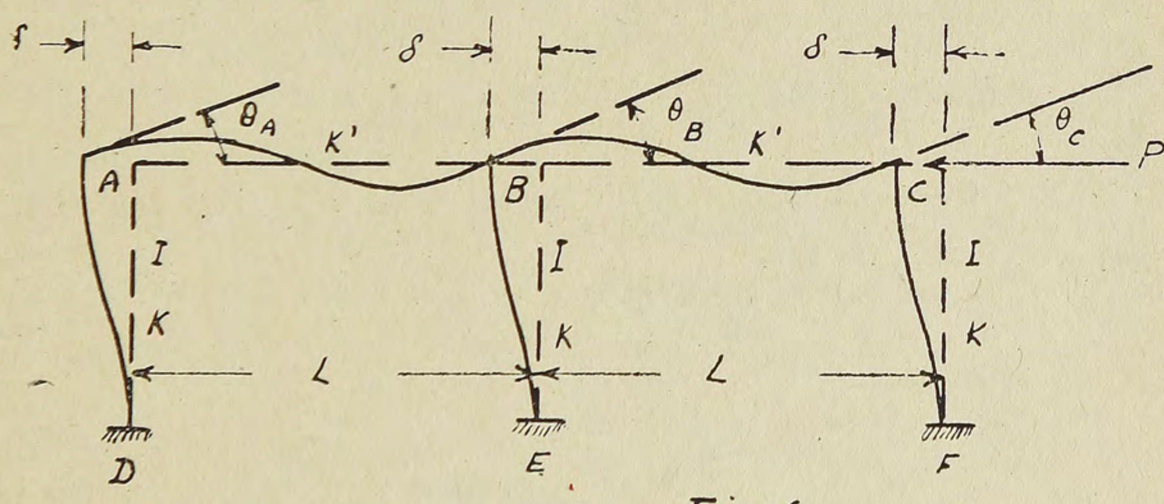


Fig. 6

$$k_{AD} = k_{BE} = k_{CF} = k = \frac{E\,I}{H}$$

$$k_{AB} = k_{BC} = k'$$

$$\theta_A = \theta_C$$

$$R = \frac{3\delta}{H}$$

En este caso se verifica:

$$M_{AD} = 2\,k\,(R - 2\theta_A)$$

$$M_{AB} = -2\,k'\,(2\,\theta_A + \theta_B)$$

$$M_{BA} = -2\,k'\,(2\,\theta_B + \theta_A)$$

$$M_{BC} = -2\,k'\,(2\,\theta_B + \theta_A)$$

$$M_{BE} = 2\,k\,(R - 2\,\theta_B)$$

$$M_{DA} = 2\,k\,(R - \theta_A)$$

$$M_{EB} = 2\,k\,(R - \theta_B)$$

$$(1)\ \Sigma M_A = 0 = 2\,k\,(R - 2\theta_A) - 2\,k'\,(2\theta_A + \theta_B)$$

$$2\,k\,R = \theta_A \times 4\,(k + k') + \theta_B \times 2\,k'$$

Haciendo $\varkappa = \dfrac{k'}{k}$

se obtiene: (a) $\underline{R = 2\theta_A\,(1 + \varkappa) + \theta_B\,\varkappa}$

$$(2)\ \Sigma M_B = 0 = -2k'\,(2\theta_B + \theta_A) - 2k'(2\theta_B + \theta_A) + 2k\,(R - 2\theta_B) = 0$$

$$2\,k\,R = \theta_A \times 4\,k' + \theta_B \times 4\,(2\,k' + k)$$

de donde

(b) $\underline{R = 2\theta_A\,\varkappa + 2\theta_B \times (1 + 2\,x)}$

$$(3)\ \Sigma M_C = 0 = \Sigma M_A$$

$$(4)\ M_{AD} + M_{DA} + M_{BE} + M_{EB} + M_{CF} + M_{FC} = -P.H$$

siendo $M_{AD} = M_{CF}$ $M_{DA} = M_{FC}$

$$(4')\ 2\,M_{AD} + 2\,M_{DA} + M_{BE} + M_{EB} = -P.H$$

Introduciendo los valores, resulta la relación:

$$4k\,(R - 2\theta_A) + 4k\,(R - \theta_A) + 2k\,(R - 2\theta_B) + 2k\,(R - \theta_B) = -P.H$$

de donde

$$\text{(c)}\quad 12\,R = 12\,\theta_A + 6\,\theta_B - P\frac{H}{k}$$

Las ecuaciones a-b-c permiten calcular las incógnitas $\theta_A - \theta_B - R$.
Introduciendo (a) en (b):

$$2\theta_A\,(1 + \varkappa) + \theta_B\,\varkappa = 2\theta_A\,\varkappa + 2\theta_B\,(1 + 2\varkappa)$$

resulta

$$\text{(A)}\qquad 2\theta_A = \theta_B\,(2 + 3\varkappa)$$

Introduciendo (a) en (c):

$$24\,\theta_A\,(1 + \varkappa) + 12\,\theta_B \cdot \varkappa = 12\,\theta_A + 6\,\theta_B - P \cdot \frac{H}{k}$$

de donde:

$$\text{(B)}\quad 12\,\theta_A\,(1 + 2\varkappa) + 6\,\theta_B\,(2\varkappa - 1) = -\frac{PH}{k}$$

Introduciendo (A) en (B):

$$\theta_B\,(2 + 3)\,\varkappa\,.\,6.\,(1 + 2\,\varkappa) + 6\,\theta_B\,(2\,\varkappa - 1) = -\frac{PH}{k}$$

resulta:

$$\theta_B = -\frac{PH}{6\,k} \cdot \frac{1}{1 + 9\,\varkappa + 6\,\varkappa^2}$$

De la ecuación (A):

$$\theta_A = -\frac{PH}{12\,k} \cdot \frac{2 + 3\,\varkappa}{1 + 9\,\varkappa + 6\,\varkappa^2}$$

Introducidos los valores de θ_A y θ_B en (a) se obtiene:

$$R = -\frac{PH}{6k} \cdot \frac{(1 + \varkappa)\,(2 + 3\,\varkappa)}{1 + 9\,\varkappa + 6\,\varkappa^2} - \frac{PH}{6k} \cdot \frac{\varkappa}{1 + 9\,\varkappa + 6\,\varkappa^2}$$

$$R = -\frac{PH}{6k} \cdot \frac{2+6\varkappa+3\varkappa^2}{1+9\varkappa+6\varkappa^2}$$

Siendo,

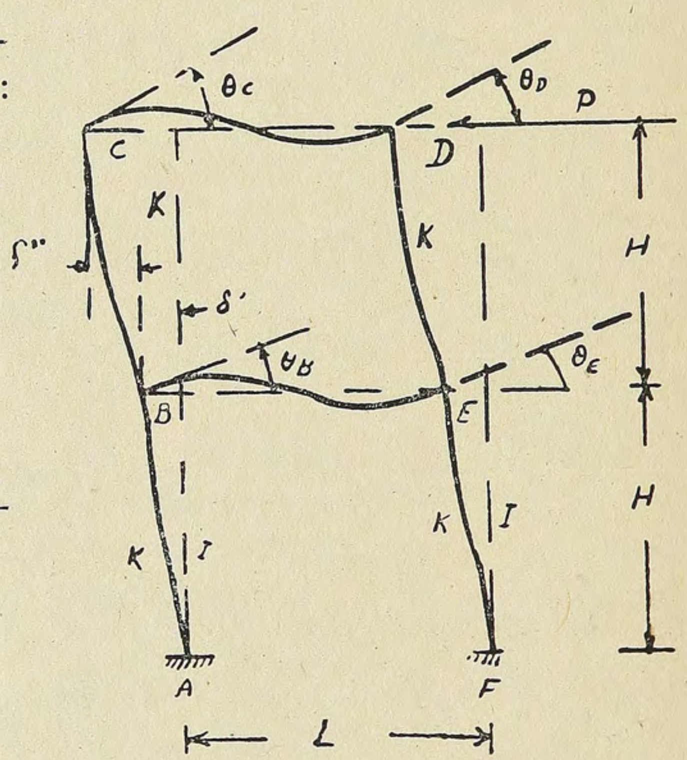
$$R = \frac{3\delta}{H}$$

$$\delta = -\frac{PH^2}{18k} \cdot \frac{2+6\varkappa+3\varkappa^2}{1+9\varkappa+6\varkappa^2}$$

$$\delta = -\frac{PH^3}{18EI} \cdot \frac{2+6\varkappa+3\varkappa^2}{1+9\varkappa+6\varkappa^2}$$

Ejemplo E.—Pórtico de dos pisos, empotrado abajo.

Las ecuaciones del método Slope Deflection nos dan las siguientes relaciones:



$$M_{AB} = 2k(R-\theta_B) \text{ con } R = \frac{3\delta'}{H}$$

$$M_{BA} = 2k(R-2\theta_B)$$

$$M_{BE} = -2k''(3\theta_B) \text{ con } \theta_E = \theta_B$$

$$M_{BC} = 2k(R'-2\theta_B-\theta_C) \text{ con } R' = \frac{3\delta''}{H}$$

$$M_{CB} = 2k(R'-2\theta_C-2\theta_B)$$

$$M_{CD} = -2k'(3\theta_C) \text{ con } \theta_D = \theta_C$$

Entre las incógnitas $\theta_B - \theta_C - R - R'$ podemos plantear las siguientes ecuaciones:

1) $\Sigma M_C = 0$ 2) $\Sigma M_B = 0$

3) $$M_{BC} + M_{CB} = -\frac{1}{2} \cdot PH$$

4) $$M_{AB} + M_{BA} = -\frac{1}{2} PH$$

1) $2k(R'-2\theta_C-\theta_B) - 2k'(3\theta_C) = 0$

Haciendo $\frac{k'}{k} = \varkappa$

resulta:

$$\text{a)}\quad \underline{R' - \theta_C\,(2 + 3\,\varkappa) - \theta_B = 0}$$

2) $2\,k\,(R - 2\,\theta_B) - 2\,k''\,(3\,\theta_B) + 2\,k\,(R' - 2\,\theta_B - \theta_C) = 0$

simplificando y haciendo $\dfrac{k''}{k} = \varkappa'$

$$\text{b)}\quad \underline{R + R' - \theta_B\,(4 + 3\,\varkappa') - \theta_C = 0}$$

3) $2\,k\,(R' - 2\,\theta_C - \theta_B) + 2\,k\,(R' - 2\,\theta_B - \theta_C) = - \dfrac{PH}{2}$

de donde:

$$\text{c)}\quad \underline{4\,R' - 6\,\theta_C - 6\,\theta_B = - \frac{PH}{2\,k}}$$

4) $2\,k\,(R - \theta_B) + 2\,k\,(R - 2\,\theta_B) = - \dfrac{PH}{2}$

de donde:

$$\text{d)}\quad \underline{2\,R - 3\,\theta_B = - \frac{PH}{4\,k}}$$

De las ecuaciones a) y d) sacamos:

5) $R' = \theta_B + \theta_C\,(2 + 3\,\varkappa)$

6) $R = \dfrac{3}{2}\,\theta_B - \dfrac{PH}{8\,k}$

Introduciendo estos valores en la ecuación b) se obtiene:

$$\frac{5}{2}\,\theta_B + \theta_C\,(2 + 3\,\varkappa) - \frac{PH}{8\,k} - \theta_B\,(4 + 3\,\varkappa') - \theta_C = 0$$

y simplificando:

$$\underline{\text{(A)} - \theta_B\left(\frac{3}{2} + 3\,\varkappa'\right) + \theta_C\,(1 + 3\,\varkappa) - \frac{PH}{8\,k} = 0}$$

Introduciendo el valor de R′ en (c) resulta:

$$4\,\theta_B + \theta_C\,(8 + 12\,\varkappa) - 6\,\theta_C - 6\,\theta_B = -\frac{PH}{2\,k}$$

de donde:

$$(B)\; -2\,\theta_B + \theta_C\,(2 + 12\,\varkappa) = -\frac{PH}{2\,k}$$

De esta ecuación (B) sacamos:

$$\theta_B = \theta_C\,(1 + 6\,\varkappa) + \frac{PH}{4\,k}$$

Introduciendo este valor en (A) resulta:

$$-\left(\frac{3}{2} + 3\,\varkappa'\right)\left[\theta_C(1 + 6\,\varkappa) + \frac{PH}{4k}\right] + \theta_C(1 + 3\,\varkappa) - \frac{PH}{8\,k} = 0$$

y ordenando:

$$\theta_C\,\left(-\frac{1}{2} - 6\,\varkappa - 3\,\varkappa' - 18\,\varkappa\,\varkappa'\right) - \frac{PH}{4k}\,(2 + 3\,\varkappa') = 0$$

de donde:

$$\theta_C = -\frac{PH}{4k} \times \frac{2 + 3\,\varkappa'}{\frac{1}{2} + 6\,\varkappa + 3\,\varkappa' + 18\,\varkappa\,\varkappa'}$$

Introduciendo este valor en la expresión de:

$$\theta_B = \theta_C\,(1 + 6\,\varkappa) + \frac{PH}{4\,k}$$

resulta:

$$\theta_B = -\frac{PH}{4\,k} \cdot \frac{6\,\varkappa + \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + 6\,\varkappa + 3\,\varkappa' + 18\,\varkappa\,\varkappa'} = -\frac{PH}{4k} \times \frac{6\,\varkappa + \frac{3}{2}}{N}$$

Calculados θ_B y θ_C obtenemos R′ de la relación (5)

$$R' = \theta_B + \theta_C\,(2 + 3\,\varkappa)$$

$$R' = -\frac{PH}{4k} \cdot \frac{6\,\varkappa + \frac{3}{2}}{N} - \frac{PH}{4\,k}\,\frac{(2 + 3\,\varkappa)\,(2 + 3\,\varkappa')}{N}$$

$$R' = -\frac{PH}{4k}\,\frac{6\varkappa + 3/2 + 4 + 6\varkappa + 6\varkappa' + 9\varkappa\varkappa'}{N}$$

$$(7)\quad R' = -\frac{PH}{4k}\cdot\frac{12\varkappa + \frac{11}{2} + 6\varkappa' + 9\varkappa\varkappa'}{N}$$

y obtenemos R de la relación (6)

$$R = \frac{3}{2}\,\theta_B\,\frac{PH}{8k}$$

$$R = \frac{3}{2}\left(-\frac{PH}{4k}\cdot\frac{6\varkappa + 3/2}{N} - \frac{PH}{8k}\right)$$

$$(8)\quad R = -\frac{PH}{8k}\left(\frac{18\varkappa + 9/2}{N} + 1\right)$$

El desplazamiento buscado es:

$$\delta = \delta' + \delta''$$

$$\delta = \frac{H}{3}(R + R')$$

De las ecuaciones (7) y (8) obtenemos:

$$R + R' = -\frac{PH}{8k}\left[\frac{18\varkappa + 9/2}{N} + 1 + \frac{24\varkappa + 11 + 12\varkappa' + 18\varkappa\varkappa'}{N}\right]$$

de donde:

$$R + R' = -\frac{PH}{8k}\cdot\frac{16 + 48\varkappa + 15\varkappa' + 36\varkappa\varkappa'}{N}$$

Finalmente:

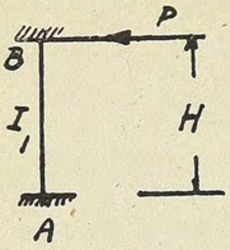
$$\delta = -\frac{PH^2}{24k}\cdot\frac{16 + 48\varkappa + 15\varkappa' + 36\varkappa\varkappa'}{1/2 + 6\varkappa + 3\varkappa' + 18\varkappa\varkappa'}$$

$$\delta = -\frac{PH^3}{12EI}\cdot\frac{16 + 48\varkappa + 15\varkappa' + 36\varkappa\varkappa'}{1 + 12\varkappa + 6\varkappa' + 36\varkappa\varkappa'}$$

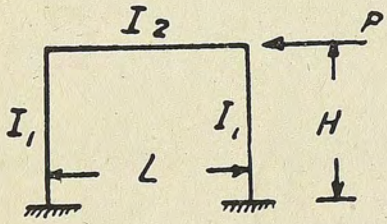
4) En el cuadro que sigue se ha resumido los períodos propios de diversas estructuras, deducidos en la forma indicada.

En las fórmulas, P se expresa en kgs., H en cms., I en cm^4 y E = 210000 (hormigón).

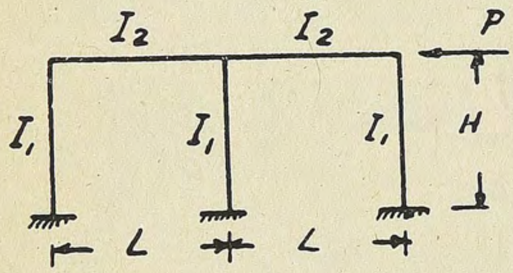
Periodo de Estructuras



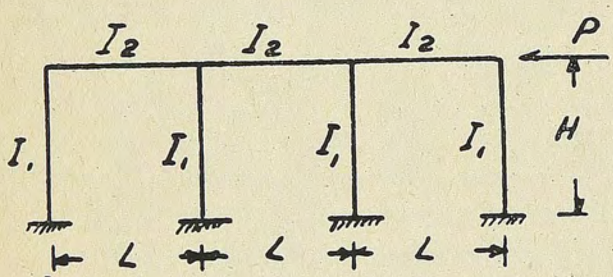
$$T = 0{,}2\sqrt{\frac{P \cdot H^3}{12\,E\,I_1}}$$



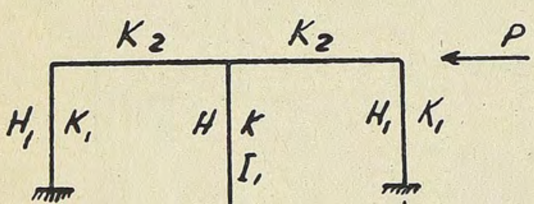
$$T = 0{,}2\sqrt{\frac{PH^3}{12EI_1} \times \frac{2+3\varkappa}{1+6\varkappa}}$$



$$T = 0{,}2\sqrt{\frac{PH^3}{18EI_1} \times \frac{2+6\varkappa+3\varkappa^2}{1+9\varkappa+6\varkappa^2}}$$

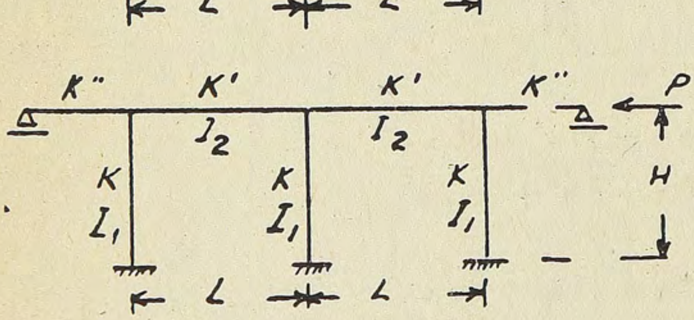


$$T = 0{,}2\sqrt{\frac{PH^3}{12EI_1} \times \frac{4+14\varkappa+9\varkappa^2}{4+41\varkappa+36\varkappa^2}}$$



$$T = 0{,}2\sqrt{\frac{PH^3}{6EI_1} \times \frac{2+4\varkappa+2\varkappa_1+3\varkappa\varkappa_1}{1+\varkappa_1+8\varkappa+6\varkappa\varkappa_1+N}}$$

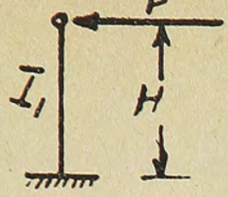
$$N = 2\frac{H^2}{H_1^2}\left(4\varkappa+6\varkappa^2+\frac{k_1}{K}+2\varkappa\frac{k_1}{K}+3\frac{H_1}{H}\varkappa\right)$$



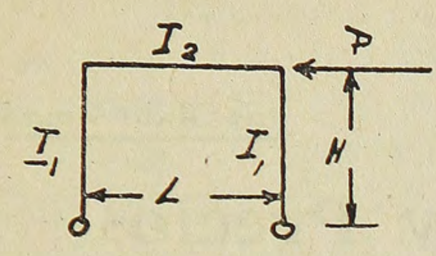
$$T = 0{,}2\sqrt{\frac{PH^3}{9EI_1} \times \frac{4+12\varkappa+3\varkappa'+6\varkappa\varkappa'+6\varkappa^2}{4+36\varkappa+9\varkappa'+24\varkappa\varkappa'+24\varkappa^2}}$$

Constantes: $\varkappa = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{H}{L}$ $\quad \varkappa - \frac{K_2}{K_1}$ $\quad \varkappa' = \frac{K''}{K}$

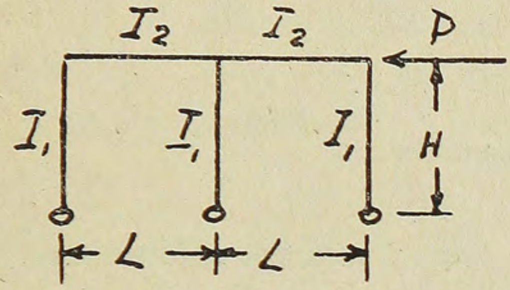
$K\,(\text{rigidez}) = \frac{I}{l}$



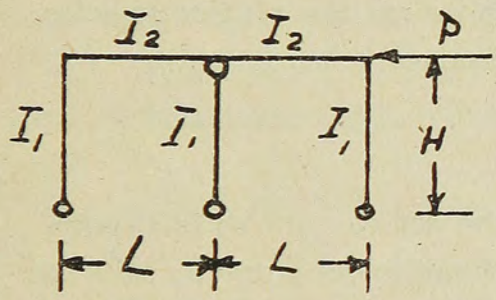
$$T = 0{,}2\sqrt{\frac{PH^3}{3EI_1}}$$



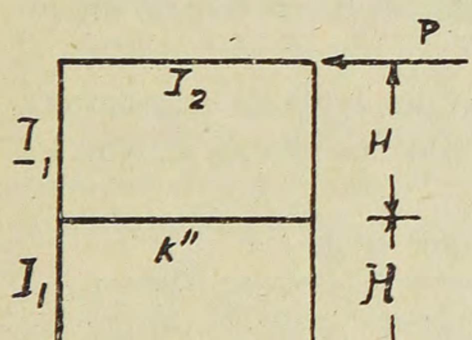
$$T = 0{,}2\sqrt{\frac{PH^3}{12EI_1} \times \frac{1+2\varkappa}{\varkappa}}$$



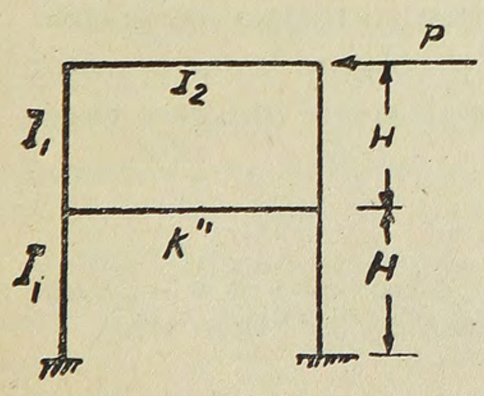
$$T = 0{,}2\sqrt{\frac{PH^3}{12EI_1} \times \frac{3+12\varkappa+8\varkappa^2}{6\varkappa+6\varkappa^2}}$$



$$T = 0{,}2\sqrt{\frac{PH^3}{12EI_1} \times \frac{2+2\varkappa}{\varkappa}}$$



$$T = 0{,}2\sqrt{\frac{PH^3}{12EI_1} \times \frac{4+16\varkappa+4\varkappa'+15\varkappa\varkappa'}{\varkappa+\varkappa'+6\varkappa\varkappa'}}$$



$$T = 0{,}2\sqrt{\frac{PH^3}{12EI_1} \times \frac{16+48\varkappa+15\varkappa'+36\varkappa\varkappa'}{1+12\varkappa+6\varkappa'+36\varkappa\varkappa'}}$$