Contradicción de los cálculos de equivalencia económica con interés simple

POR

RAMON SALAS EDWARDS

Con ocasión de los artículos publicados por don Leonardo Lira (Julio p. 334) y por mí (Agosto p. 369) parece oportuno considerar, la cuestión general de los cálculos de equivalencia económica, de que la cuestión discutida en esos artículos es un caso interesante.

Permítaseme comenzar por un ejemplo elemental, para manifestar las contradicciones a que conducen los cálculos con intereses simples.

«Una sociedad que está obligada a entregar 10 000 pesos, dentro de 100 años, desea cambiar su compromiso por el de pagar a los 50 años una suma menor X, que se ha de calcular de modo que ambos compromisos sean económicamente equivalentes».

Suponiendo intereses simples y aceptando para simplificar la tasa de 10 % anual, se podría hacer cualesquiera de los siguientes raciocinios entre otros:

I. La suma que entregada al contado es equivalente a 10 000 pesos, entregados dentro de 100 años es $\frac{10\,000}{11} = 999$ pesos, pues al cabo de 100 años los intereses son 10 veces el capital y agregados a él lo hacen 11 veces mayor.

Análogamente la suma que entregada al contado equivale a la cantidad x entregada dentro de 50 años es $\frac{x}{6}$

La equivalencia de ambos compromisos exige, pues:

$$909 \text{ pesos} = \frac{x}{6}; \qquad x = 5\,455 \text{ pesos}$$

II. La equivalencia de compromisos exige que cuando llegue el momento de entregar la cantidad x sea indiferente hacerlo o esperar 50 años más para completar los 100 años y entregar 10 000 pesos.

La entrega de 10 000 pesos, dentro de 50 años, equivaldría entonces a la entrega inmediata de $\frac{10\,000}{6} = 1\,667$, según resulta de un raciocinio análogo al anterior.

Por lo tanto: $x = 1\,667$.

III. Supongamos ya trascurridos 75 años.

El hecho de haber entregado la suma x a los 50 años equivaldría en esa fecha a haberse privado de esa cantidad y de los intereses que habría devengado durante 75—50=25 años que alcanzan al 10 % a 2,5 veces el capital, o sea, equivaldrían a un total de 3,5 x.

El tener que entregar 10 000 pesos a los 50 años, es decir, dentro de 100—75 =25 años equivaldría en esa fecha a la entrega inmediata de $\frac{10\,000}{3,5} = 2\,857$ pesos.

La equivalencia económica exigiría, pues:

$$3,5\ x = 2\,857 \text{ pesos}$$
$$x = 816 \text{ pesos}$$

La contradicción, y el absurdo consiguiente, de estos cálculos se debe a la hipótesis inadmisible del interés simple, pues en ella no se acepta que las cantidades abonadas por intereses sean a su vez capaces de producir intereses y sin embargo, a pesar de esta heterogeneidad, se la suma con el capital a que se reconoce esta productividad.

La solución de la contradicción se encuentra en las condiciones reales del mecanismo económico en que en periodos cortos los intereses se agregan al capital y en el periodo siguiente se abonan intereses por la suma de ambos.

Con toda perfección se evitaría la discordancia en la capitalización continua en que los intereses se van capitalizando continuamente e inmediatamente después de devengados.

En este caso llamado C_0 el capital inicial y C el capital con los intereses acumulados durante el tiempo *t*, y designando por *i* el tanto por uno de interés, se tiene:

$$d\,C = Cidt$$
$$C = C_0\, e^{it}$$

La práctica comercial de capitalización semestral da, expresando *t* en años: $C_0\,(1 + {}^1/_2\, i)^{2t}$.

Comparando ambas fórmulas dentro de los límites de aplicación se ve que es pequeño el exceso que resulta de la capitalización continua sobre la semestral;

prácticamente esta diferencia queda compensada cuando se reduce a 0,99 o 0,98 de su valor la tasa de interés.

Para comodidad se podría escribir la ecuación anterior en la forma siguiente en que ya está hecha esta corrección y que manifiesta que para determinar el número por que se multiplica un capital al agregarle sus intereses semestralmente, basta buscar en una tabla de logaritmos vulgares el número correspondiente a 0.43 it.

$$\log\frac{C}{C_o} = 0{.}43\ it$$

Hé aquí tratado el ejemplo anteriór tomando en cuenta los intereses compuestos y siguiendo los mismos tres raciocinios anteriores.

I. La suma que entregada al contado equivale a 10 000, entregados dentro de 100 años es $\frac{10\,000}{20\,000} = 0{,}50$; pues 20 000 es el número correspondiente a un logaritmo igual a $0{,}43 \times 0{,}10 \times 100 = 4{,}3$.

Análogamente la suma que entregada al contado equivale a la cantidad x entregada dentro de 50 años es $\frac{x}{141}$

La equivalencia de ambos compromisos exige pues:

$$\$\ 0,50 = \frac{x}{141}; \qquad x = \$\ 70$$

II. La equivalencia de compromisos exige que cuando llegue el momento de entregar la cantidad x sea indiferente hacerlo o esperar 50 años más, para completar 100 y entregar 10 000 pesos.

La entrega de 10 000 pesos, dentro de 50 años equivaldría entonces a la entrega inmediata de $\frac{10\,000}{141} = 70$; y, por lo tanto, también se obtiene

$$x = 70 \text{ pesos}$$

III. Si suponemos trascurridos 75 años, el haber entregado la suma x equivaldría en esa fecha a haberse privado de esa cantidad y los intereses acumulados en 25 años, o sea 11,9 x; pues 11,9 es el número que corresponde a un logaritmo igual a $0.43 \times 0.10 \times 25 = 1\ 075$.

El tener que entregar 10 000 pesos, dentro de 25 años equivaldría a $\frac{10\,000}{11{,}9} = 840$ pesos.

La equivalencia queda satisfecha igualmente con:

$$11{,}9\ x = 840 \text{ pesos}; \qquad x = 70 \text{ pesos}$$

Este ejemplo manifiesta, pues, la armonía de los resultados que se obtienen dentro de las condiciones reales del mecanismo económico y las enormes diferencias que estos resultados guardan con los valores contradictorios a que conduce la hipótesis del interés simple lógica y económicamente inadmisible.

Finalmente, interesa volver sobre el ejemplo que originó esta cuestión.

Se trataba de calcular la razón $\frac{B}{A}$ que debían guardar los precios A y B de dos clases de cañerías, cuyas duraciones se había aceptado de 120 y de 40 años, respectivamente, para que ambas clases fueran económicamente equivalentes, siendo 10 % el tipo de interés.

El señor Lira, suponiendo intereses simples, y haciendo un balance al cabo de los 120 primeros años de las cantidades invertidas anteriormente en la adquisición de una cañería de precio A y de tres de precio B, obtuvo (Junio p. 275):

$$\frac{B}{A} = \frac{13}{27} \text{ o aproximadamente } \frac{1}{2}$$

En el número siguiente (Julio p. 335) expresé mi opinión adversa a la hipótesis de interés simple y para manifestar las contradicciones a que conduce hice un balance inicial de las sumas de que se ha de disponer para los mismos 120 primeros años, tomando intereses simples y obtuve:

$$\frac{B}{A} = \frac{45}{59} \text{ o aproximadamente } \frac{3}{4}$$

En el artículo del número siguiente (Agosto p. 371) se cree evadir la contradicción obligando a considerar toda una serie infinita de adquisiciones sucesivas de cañerías de la misma clase.

Esta exigencia parece innecesaria, pues sería esencial a la equivalencia económica que cada 120 años, cuando se presentara la oportunidad de optar entre ambas clases de cañerías, fuera indiferente colocar ya una ya otra, aunque las anteriores hubieran sido diferentes; pero es cierto que la investigación debería conducir al mismo resultado si no hubiera una contradicción en la hipótesis de interés simple.

En el primer artículo también, no se consideraba sino los 120 primeros años.

Voy a tratar sucintamente la cuestión desde el punto de vista de una serie de adquisiciones de la misma clase, para agregar un ejemplo más de las contradicciones y absurdos a que conduce el interés simple.

La adquisición de una serie de cañerías de precio A y 120 años de duración significa, agregando los intereses simples, al cabo de un número n de años múltiplo de 120:

$$A\left[1+0.1\,n\right] + A\left[1+0.1\,(n-120)\right] + \ldots + A\left[1+0.1\times 120\right] A\left(\frac{7\,n}{120}+\frac{n^2}{2400}\right)$$

La adquisición de la serie correspondiente de precio B y 40 años de duración significa análogamente:

$$B\left[1+0.1\,n\right] + B\left[1+0.1\,(n-40)\right] + \ldots B\left[1+0.1\times 40\right] = B\left(\frac{3\,n}{40}+\frac{n^2}{80}\right)$$

Igualando estas expresiones se obtiene:

$$\frac{B}{A}=\frac{140+n}{180+3\,n}\,.$$

Esta expresión que de acuerdo con el cálculo del señor Lira toma el valor $\frac{13}{27}$ cuando $n = 120$, va decreciendo a medida que aumenta n y tiende para $n = \infty$ a

$$\lim.\ \frac{B}{A}=\frac{1}{3}$$

Si se prevé la adquisición futura de una serie de cañerías hasta alcanzar el número n de años, y se avalúan las sumas actuales necesarias para adquirirlas, tomando intereses simples, se obtiene como lo establece el Sr. Lira (p. 371);

$$\frac{B}{A}=\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{0.1\,n-11}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{0.1\,n-3}}$$

Esta expresión confirma el valor $\frac{45}{59}$ encontrado para $n = 120$; pero tomando mayor número de términos el Sr. Lira ha encontrado 0,644.

Los términos del numerador y del denominador son los de la serie armónica, ejemplo clásico de series divergentes:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

Figuran a partir del primer término, uno de cada 12 en el numerador y uno de cada 4 en el denominador.

Dada la divergencia de las series para calcular el límite de la razón y resolver la aparente indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, se puede sin error suprimir a la cabeza de cada serie un número de términos, hasta llegar a valores suficientemente altos de sus denominadores para que los términos de la serie que constituye el denominador sean agrupables de a tres en tres y la suma de cada grupo igualada sin error sensible al triple de los primeros de cada grupo que son iguales a los términos de la serie que constituye el numerador.

Al límite, pues, se obtiene también con balance previo $\frac{1}{3}$ como valor de la razón; es curioso notar que estos resultados límites independientes de la tasa de interés, son la razón de las duraciones $\frac{40}{120} = \frac{1}{3}$.

En cambio, de la anarquía que acarrea la contradicción que envuelve la hipótesis de interés simple, la consideración del mecanismo real de la organización económica da siempre resultados concordantes.

Y en verdad si se puede contar con una vida de 40 años en una construcción, basta una economía de $\frac{1}{15}$ para justificar su preferencia sobre otras de mayor duración, como resulta del cálculo de la pág. 335.

Además, parece ostensible que no se ha de optar por una solución que cuesta el doble que una que dura 40 años, porque dure tres veces más.