Puente sobre el Río Bueno en Río Bueno

(Arcos de concreto armado)

POR

CARLOS ALLIENDE ARRAU

Cálculos

§ I. GENERALIDADES

Se hará solamente el cálculo de un arco, pues, las losas, traversaños y longuerinos que forman el piso, son análogos a otras que ya se han adoptado en otros puentes de concreto armado proyectados por la Oficina. (1)

Se tomará un arco de las centrales.

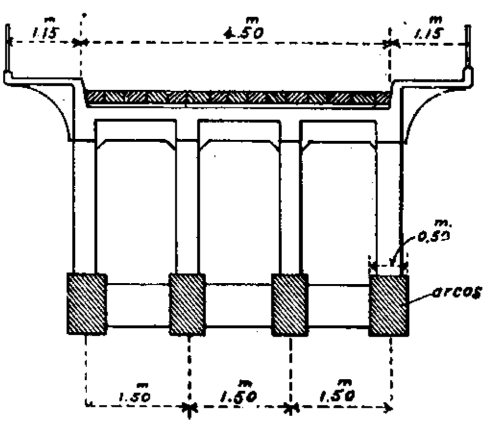


Fig. 1

(1) Se trata de un proyecto para la Inspección General de Puentes y Caminos de la Dirección General de O. Públicas.

El cálculo se hará con un doble tren de camiones automóviles de 10 toneladas, cuyas características están indicadas en la figura 2.

En el ancho de 4.50 mts. pueden andar dos camiones, aunque en forma estrecha.

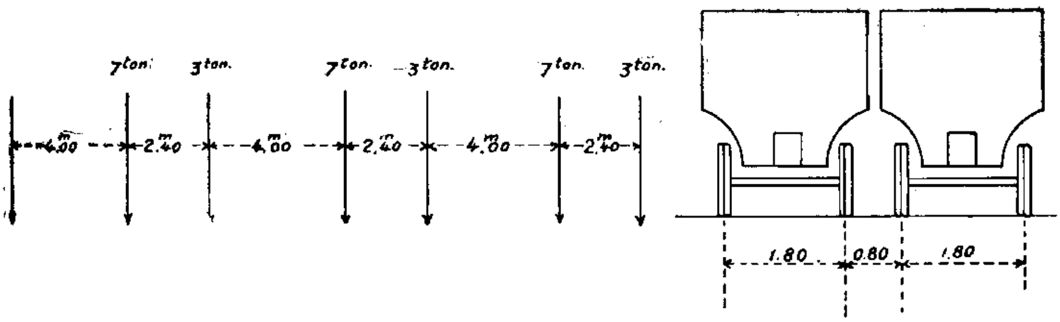


Fig. 2

Por consideraciones relacionadas con los caminos de acceso se fijó como flecha de la línea media del arco 7 mts., siendo la luz teórica de esta misma línea 35.m20; para los efectos de la trasmisión de la carga se dividió longitudinalmente el arco en 16 paños de 2.20 mts., coincidiendo los puntos de división con los pilares que soportan el piso.

Queda por determinar la forma misma del arco, pues sólo se conoce de él su flecha y la luz. La forma más económica es aquella que hace que la línea de presiones coincida con la línea media cuando obran solamente las cargas del peso muerto. En otras palabras, si la línea media, debe pasar por A C B, es preciso encontrar el polígono funicular que pase por A C B correspondiente a las fuerzas del peso muerto y tomar como línea media ese polígono funicular.

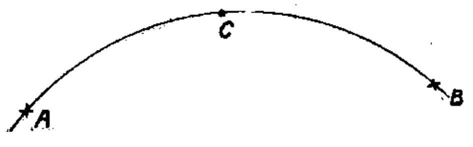


Fig. 21

En el caso presente se procedió como sigue:

Se supuso primeramente que el polígono funicular era el arco de círculo que pasa por *A*, *C* y *B;* se determinaron los pesos después de asignarle a cada trozo un espesor que variaba desde 0.80 mts., en la clave hasta 1.20 mts., en los arranques, y se determinó por medio del cálculo el valor del momento en C de las fuerzas anteriores. Este momento fué de:

$$M_c = 39\ 521\ 600 \text{ kg. ctms.}$$

Si a, p, q, r... o b. es el polígono funicular, es preciso que M_c quede representado por 7 centímetros para hacer que el polígono pase por los 3 puntos.

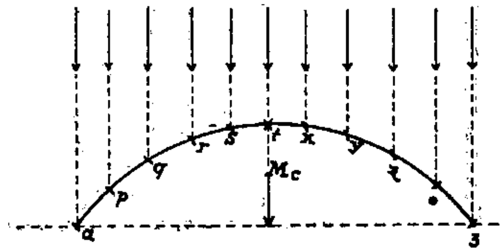


Fig. 3.

$$\text{Escala de momentos: } \eta = \frac{\phi . \lambda}{v}$$

$$\phi = \text{escala de fuerzas} = \frac{1 \text{ ctm.}}{5\ 000 \text{ kgs.}}$$

$$\lambda = \text{escala de abcisas} = \frac{1}{100}$$

M_c = 7 ctms. = 395 216 00, ó sea, 1 centímetro equivale a 5 645943 kg. ctms.

$$\text{En suma, } M = \frac{1 \text{ centm.}}{5\ 645\ 943 \text{ kg. ctms.}}$$

$$\therefore\ v = \frac{\phi\ 7}{M} = \frac{\dfrac{1 \text{ ctm.}}{5\ 000 \text{ kgs.}} = \dfrac{1}{100}}{\dfrac{1 \text{ ctm.}}{5\ 645\ 943 \text{ kgcts.}}} = 11.29 \text{ ctms.}$$

Con esta distancia polar debe construírse el polígono.

La línea media que resultó de esta construcción está indicada en la fig. 4. Rectificados los pesos con la nueva forma del arco, se vió que ellos eran muy semejantes, de modo que no se creyó necesario hacer una segunda aproximación.

Las diversas notaciones del arco se encuentran en la lámina I.

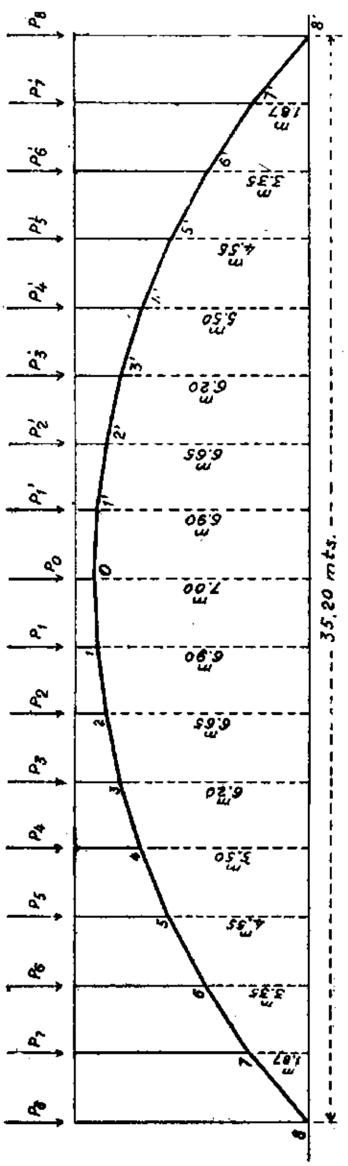


Fig. 4

§ II. ECUACIONES GENERALES

Las ecuaciones generales de la deformación de las piezas curvas, aplicadas al caso presente en que hay encastramiento en ambos extremos del arco, son:

1) Ecuación que expresa que la suma de los desplazamientos horizontales de la fibra media del arco es cero:

$$0 = \int \frac{M_x}{E.I} ds.y - \int \frac{N_x ds}{E.F} \cos\phi + \alpha.t.l \quad (1)$$

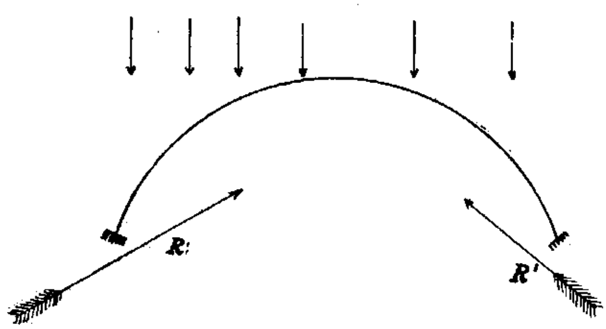
2) Ecuación que expresa que la suma de los desplazamientos verticales de la fibra media del arco es cero:

$$0 = -\int \frac{M_x}{E.I} ds.x + \int \frac{N_x}{E.F} ds \operatorname{sen}\varphi \quad (2)$$

3) Ecuación que expresa que la suma de los desplazamientos angulares de la fibra media del arco es cero:

$$0 = \int \frac{M_x ds}{E I} \quad (3)$$

En las expresiones anteriores:
M_x = momento de flexión en sección x
N_x = fuerza normal » »
F = superficie de una sección cualquiera
ϕ = ángulo de la fibra media con la horizontal en una sección cualquiera.



Las demás letras expresan términos muy conocidos.
Fuera de M_x y N_x, en una sección cualquiera hay que considerar el valor

del esfuerzo traversal, el cual puede despreciarse por no tener influencia apreciable en la deformación del arco.

La solicitación general del arco es la de una pieza sometida a la acción de una serie de fuerzas verticales y de las reacciones *R*.

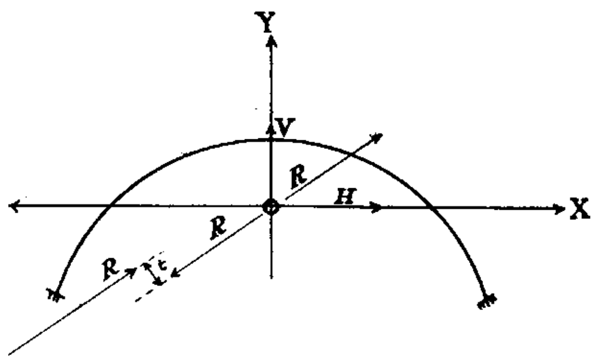


Fig. 6

Las ecuaciones se simplifican mucho obrando como sigue:

Tomemos un sistema de coordenados como el de la fig. 6 y en el punto O apliquemos la fuerza R en sentidos contrarios, lo cual no produce alteración en el sistema. Una de las fuerzas R puede descomponerse en sus componentes *H* y *V*, y la otra puede unirse con la reacción en un par cuyo momento es

$$M = R \, . \, t$$

Se tienen, en suma, las tres reacciones H, V y M, estáticamente indeterminadas y el sistema puede reemplazarse por el de la fig. 7, o sea, por una pieza encastrada en el apoyo de la derecha y libre en el de la izquierda, pero sometida a la acción de las reacciones H, V y M que obran en el punto O y a las fuerzas exteriores P.

Si llamamos ahora M_0 al momento de las fuerzas exteriores que obran a la izquierda de una sección *x* cualquiera, respecto del centro de gravedad de ésta, se tendrá para M_x el siguiente valor:

$$M_x = M_0 + M - H\,y - V_x \qquad (4)$$

Resolviendo el sistema de las 4 ecuaciones de las págs. 430 y 431, se puede determinar cualquiera de los valores M, H y V.

Pero en la resolución de estas ecuaciones se puede todavía obtener grandes simplificaciones eligiendo un adecuado sistema de ejes coordenados. Si el eje de las Y se hace pasar por el plano de simetría del arco, las integrales

$$\int \frac{x\, ds}{I} = 0$$

Del mismo modo, si el punto O se determina de manera que él sea el centro de gravedad de los valores $\frac{ds}{I}$ de las diversas secciones del arco, las integrales $\int \frac{I \cdot ds}{I} = 0$ Como consecuencia, también serán iguales a cero las integrales $\int \frac{x\, I\, ds}{I}$

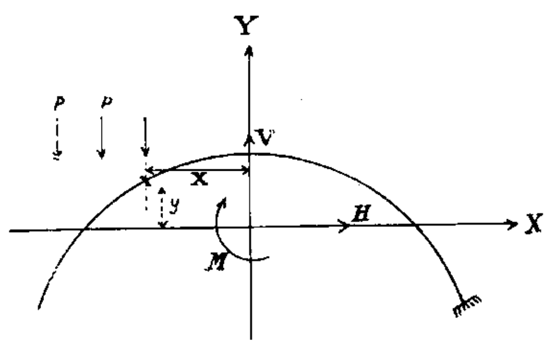


Fig. 7

En definitiva, los ejes coordenados se elegirán de modo que el eje de los Y pase por el plano de simetría del arco, y que el eje de los X pase por el centro de gravedad de los valores $\frac{ds}{I}$ y sea perpendicular al de los Y. Así se tendrá

$$\int \frac{I\, ds}{I} = 0 \qquad \int \frac{x\, ds}{I} = 0 \qquad \int \frac{x\, I\, ds}{I} = 0 \tag{5}$$

Para eliminar los valores, introdúzcase primero la ecuación (4) en (3)

$$0 = \int \frac{M_o\, ds}{E\, I} + \int \frac{M\, ds}{E.I} - H \int \frac{I\, ds}{E.I} - V \int \frac{x\, ds}{I}$$

En virtud de ecuaciones (5) los dos últimos términos son iguales a cero, y se tiene

$$M = -\frac{\int M_0 \frac{ds}{I}}{\int \frac{ds}{I}} \qquad (6)$$

En ecuación (1) introdúzcanse M_x

$$\int \frac{M_0 \, ds \, y}{E.I} + \int \frac{M \, ds.y}{E\,I} - H\int \frac{ds.y^2}{E\,I} - V\int \frac{ds.x.y}{E\,I} - \int \frac{N_x.ds \cos\phi}{E.F} + \alpha\, t\, l = 0$$

$$\int \frac{M_0 \, ds \, y}{I} + M\int \frac{ds.y}{I} - H\int \frac{ds.y^2}{I} - V\int \frac{ds.y.x}{I} - \int \frac{N_x \cos\phi \, ds}{F} + \alpha\, t\, l\, E = 0$$

En virtud de ecuaciones (5) los términos $M \int \frac{ds\,y}{I}$ y $V \int \frac{ds.y.x}{I}$ valen cero. Además, en vez de $N_x \cos\phi$ se puede colocar el valor de H, sin error apreciable y por la misma razón puede despreciarse *$N x$ sen ϕ*. Queda entonces

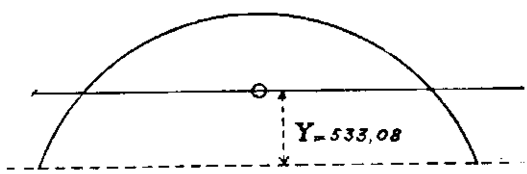


Fig. 8

$$H = \frac{\int M_0 \frac{ds}{I} \cdot y + E\,\alpha . t . l}{\int \frac{ds.y^2}{I} + \int \frac{ds}{F}} \qquad (7)$$

Del mismo modo se determina V

$$V = \frac{\int M_0 \frac{ds}{I}\, x}{\int \frac{x^2\, ds}{I}} \qquad (8)$$

Las tres ecuaciones por aplicar son en suma:

$$\left\{\begin{aligned} M &= -\frac{\int M_0 \frac{ds}{I}}{\int \frac{ds}{I}} && (6) \\ H &= \frac{\int M_0 \frac{ds}{I} y + E \alpha t l}{\int \frac{ds\, y^2}{I} + \int \frac{ds}{F}} && (7) \\ V &= \frac{\int M_0 \frac{ds}{I} x}{\int x^2 \frac{ds}{I}} && (8) \end{aligned}\right.$$

§ III. Acción del Peso muerto

Determinación de los ejes coordenados

Hemos dicho que para obtener las simplificaciones expresadas por ecuaciones (5), era preciso elegir el origen, de modo que él fuera el centro de gravedad de los valores $\frac{ds}{I}$

Los diversos valores de *ds* son:

$ds_1 = 220$ ctms.

$ds_2 = 222$ »

$ds_3 = 223$ »

$ds_4 = 230$ »

$ds_5 = 240$ »

$ds_6 = 250$ »

$ds_7 = 265$ »

$ds_8 = 290$ »

Como el arco es simétrico, estos valores se repiten al lado derecho (Véase lámina I).

La práctica corriente consiste en atribuír a cada trozo *ds* un valor constante de I, y de ahí es que, según la forma del arco, convenga dividirlo en un número de partes más o menos grandes. En el presente caso se ha considerado prudente tomar 16 trozos.

El trozo ds_1	está armado con	10 barras de 1"	....	I = 3 052 000 ctm.[4]
» » ds_2	» » »	10 » » 1"	....	I = 3 381 000 »
» » ds_3	» » »	10 » » 1"	....	I = 3 855 000 »
» » ds_4	» » »	8 b de $\frac{3"}{4}$ y 2 de 1"	.....	I = 3 941 000 »
» » ds_5	» » »	id	....	I = 4 470 000 »
» » ds_6	» » »	id	.....	I = 5 319 000 »
» » ds_7	» » »	10 b. de 1 $\frac{1"}{4}$	....	I = 8 325 000 »
» » ds_8	» » »	id	....	I = 9 826 000 »

A la derecha se repiten los valores.

Los valores de $\frac{ds}{I}$ son:

$$\frac{ds_1}{I} = 0.000\ 072\ 084$$

$$\frac{ds_2}{I} = 0.000\ 065\ 661$$

$$\frac{ds_3}{I} = 0.000\ 057\ 847$$

$$\frac{ds_4}{I} = 0.000\ 058\ 361$$

$$\frac{ds_5}{I} = 0.000\ 053\ 691$$

$$\frac{ds_6}{I} = 0.000\ 047\ 001$$

$$\frac{ds_7}{I} = 0.000\ 031\ 832$$

$$\frac{ds_8}{I} = 0.000 \quad 029 \quad 514$$

$$\xi \frac{ds}{I} = 0.000 \quad 415 \quad 991$$

Para determinar el centro de gravedad de los $\frac{ds}{I}$, tomaremos momento de esos valores considerados como fuerzas, respecto del eje que une los arranques de la línea media. Los brazos de palanca de los $\frac{ds}{I}$ están en la fig. α de la lámina I.

$$\begin{aligned}
0.000 \ 072 \ 084 \times 695 &= 0.050 \ 098 \ 380 \\
0.000 \ 065 \ 661 \times 675 &= 0.044 \ 321 \ 175 \\
0.000 \ 057 \ 847 \times 647 &= 0.037 \ 022 \ 080 \\
0.000 \ 058 \ 361 \times 580 &= 0.033 \ 849 \ 380 \\
0.000 \ 053 \ 691 \times 500 &= 0.026 \ 845 \ 500 \\
0.000 \ 047 \ 001 \times 395 &= 0.018 \ 565 \ 395 \\
0.000 \ 031 \ 832 \times 262 &= 0.008 \ 339 \ 934 \\
0.000 \ 029 \ 514 \times 92 &= 0.002 \ 715 \ 288 \\
\hline
\xi &= 0.221 \ 757 \ 182
\end{aligned}$$

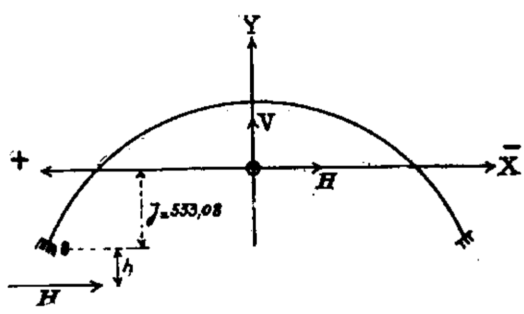


Fig. 9

Llamando γ la distancia incógnita que se busca, se puede expresar la ecuación siguiente:

$$\xi \frac{ds}{I} \cdot \gamma = 0.221\ 757\ 182$$

$$\gamma = \frac{0.221\ 757\ 182}{\xi \frac{ds}{I}} = \frac{0.221\ 757\ 182}{0.000\ 415\ 981} = \underline{\underline{533,08}} \text{ ctms.}$$

La determinación se ha hecho sólo con la mitad del arco, por ser la otra igual.

Encontrado el eje 0 X, se determinarán los nuevos ordenados de los diversos trozos:

$y_1 = 695 - 533.08 = +\ 161.92$	$x_1 = +\ 110$
$y_2 = 675 - 533.08 = +\ 141.92$	$x_2 = +\ 330$
$y_3 = 640 - 533.08 = +\ 106.92$	$x_3 = +\ 550$
$y_4 = 580 - 533.08 = +\ 46.92$	$x_4 = +\ 770$
$y_5 = 500 - 533.08 = -\ 33.08$	$x_5 = +\ 990$
$y_6 = 395 - 533.08 = -\ 138.08$	$x_6 = +\ 1210$
$y_7 = 262 - 533.08 = -\ 271.08$	$x_7 = +\ 1430$
$y_8 = 92 - 533.08 = -\ 441.08$	$x_8 = +\ 1650$

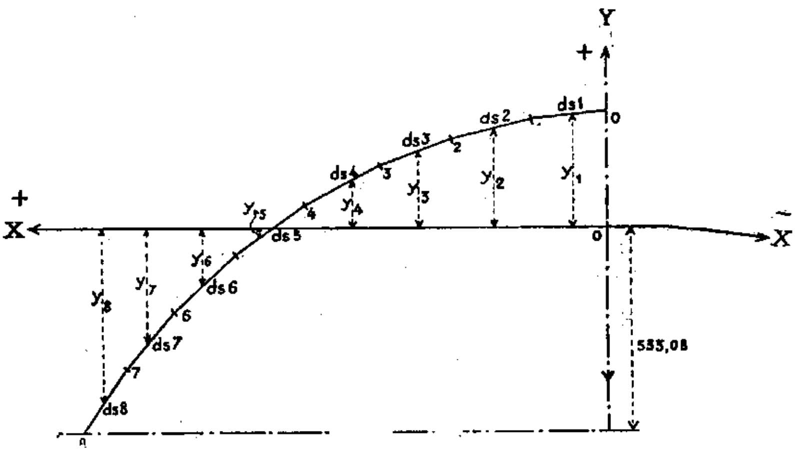


Fig. 91

Volvamos ahora a las ecuaciones 6, 7 y 8 de la pág. 434. Se ve que figuran en ellas las integrales $\int \frac{ds}{J}$, $\int \frac{y\ ds}{J}$, $\int \frac{y^2\ ds}{J}$, $\int \frac{ds}{J} x$ y $\int \frac{x^2\ ds}{J}$, las que se calcularán primero.

Se parte de los valores parciales de $\frac{ds}{J}$, a los cuales en cada caso habrá que multiplicar por y, por y^2, por x, por x^2 correspondiente a cada trozo ds. Después basta hacer la suma algebraica de los valores parciales para obtener el valor total de cada integral.

En la página .. se han reunido en un cuadro los valores parciales de las diversas integrales indicadas y la suma total.

De este cuadro se deduce:

$$\left\{\begin{aligned} &\int \frac{ds}{J}\, y^2 = 26.076\ 421\ 110 \\ &\int \frac{ds}{J} = 0.000\ 831\ 982 \\ &\int \frac{ds}{J}\, x^2 = 654.110\ 977\ 400 \\ &\int \frac{ds}{J} = 0.702\ 988 \end{aligned}\right.$$

La unidad es el centímetro.

Introduciendo estas expresiones en las ecuaciones 6, 7 y 8, y dejando la consideración de la temperatura para después, se tiene

$$M = -\frac{\int M_0 \frac{ds}{I}}{0.000\ 831\ 982}$$

$$H = \frac{\int M_0 \frac{ds}{I}}{26.076.421\ 110 + 0.702\ 988} = \frac{\int M_0 \frac{ds}{I}}{26.779\ 409\ 110}$$

$$V = \frac{\int M_0 \frac{ds}{I}\, x}{654.010\ 977\ 400}$$

Falta solo que calcular las integrales en que figura M_0.

Trozos	Armaduras	I en ctms4	$\frac{ds}{I}$	x en ctms.	I en ctms.	$\frac{ds}{I}y$	$\frac{ds}{I}x$	$\frac{ds}{I}y^2$	$\frac{ds}{I}x^2$	F en ctms²	$\frac{ds}{F}$
ds_1=220 ctms.	10b. de 1''	3052 000	0.0000 72084	+110	+161.92	+0.011 671841	+0.007 929240	1.889 904540	0.872 216409	4750	0.046 316
ds_2=222 »		3381 000	0.0000 65661	+330	+141.92	+0.00 9318609	+0.021 668130	1.322 497006	7.150 482900	4900	0.045 306
ds_3=223 »		3855 000	0.0000 57847	+550	+106.92	+0.006 185001	+0.031 815850	0.661 300333	17.498 717500	5100	0.043 726
ds_4=230 »	+2 de 1'' 8b. de $\frac{3}{4}$	3941 000	0.0000 58361	+770	+ 46.92	+0.002 738298	+0.041 937970	0.128 480948	34.602 236900	5040	0.044 246
ds_5=240 »		4470 000	0.0000 53691	+990	− 33.08	−0.001 776098	+0.053 154090	0.058 753331	52.622 549100	5220	0.045 977
ds_6=250 »		5319 000	0.0000 47001	+1210	−138.08	0.006 489898	+0.056 871210	0.896 125127	68.814 164100	5520	0.045 290
ds_7=265 »	1 $^1/_4$' 10b. de	8325 000	0.0000 31832	+1430	− 271.08	−0.008 629019	+0.045 519760	2.339 154351	65.093 256800	6780	0.039 086
ds_8=290 »		9826 000	0.0000 29514	+1650	− 441.08	−0.013 018035	+0.018 698100	5.741 994919	80.351 865100	6980	0.041 547
ds'_1=220 »	10b. de 1'	3052 000	0.0000 72084	−110	+161.92	−0.011 661841	0.007 929240	1.889 904540	0.872 216400	4750	0.046 316
ds'_2=222 »		3381 000	0.0000 65661	−330	+141.92	+0.009 318609	−0.021 668130	1.322 497006	7.150 482900	4900	0.045 306
ds'_3=223 »		3855 000	0.0000 57847	−550	+106.92	+0.006 185001	−0.031 815850	0.661 300333	17.498 717500	5100	0.043 726
ds'_4=230 »	+2 de 1' 8b. de $^1/_4$	3941 000	0.0000 58361	−770	+ 46.92	+0.002 738298	−0.014 937970	0.128 480948	34.602 236900	5040	0.044 246
ds'_5=240 »		4470 000	0.0000 53691	−990	− 33.08	−0.001 776098	−0.053 154090	0.058 753331	52.622 549100	5220	0.045 977
ds'_6=250 »		5319 000	0.0000 47001	−1210	−138.08	−0.006 489898	−0.056 871210	0.896 125127	68.814 164100	5520	0.045 290
ds'_7=265 »	1 $^1/_4$' 10b. de	8325 000	0.0000 31832	−1430	−271.08	−0.008 629019	−0.045 519760	2.339 154351	65.093 256800	6780	0.039 086
ds'_8=290 »		9826 000	0.0000 29514	1650	−441.08	−0.013 018035	−0.048 698100	5.741 994919	80.351 865000	6980	0.041 547
			$\int\frac{ds}{J}$=0.000 831982			$\Sigma=0$	$\Sigma=0$	$\int$ = 26.076 421110	$\int$=654.010 977400		$\int$=0.702 988

CÁLCULO DE $\int M_0 \frac{ds}{J}$ Y LINEA DE INFLUENCIA DE M.

Para simplificar y a fin de tomar el caso más general posible, supondremos que las fuerzas P valen la unidad, o sea, determinaremos las líneas de influencia de M, H y V. Antes explicaremos el verdadero sentido de la integral $\int M_0 \frac{ds}{J}$

Se sabe que respecto de una sección x_1 cualquiera M_0 es el momento de las fuerzas que obran a la izquierda de x_1.

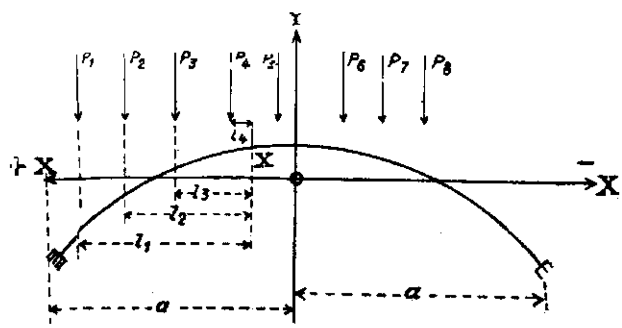


Fig. 10

$$M_0 = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + P_4 l_4 = \Sigma P l$$

Este término debe multiplicarse por el valor $\frac{ds}{I}$ correspondiente a la sección x_1 considerada y se obtendrá así un término que llamaremos T_1.

$$T_1 = \Sigma P l . \left(\frac{ds}{I}\right)_{x_1}$$

Para otra sección x_2 tendremos una expresión análoga que llamaremos T_2.

$$T_2 = \Sigma P l' \left(\frac{ds}{I}\right)_{x_2}$$

Esta misma operación debe repetirse para todos los elementos $\left(\frac{ds}{I}\right)$ en que se haya dividido el arco, pues la integral es desde $+ a$ hasta $- a$.

O sea, $\int_{-a}^{+a} M_0 \frac{ds}{J} = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots\ldots T_n = \Sigma T$

Ahora bien, como lo que se desea es determinar la línea de influencia de M, H y V, o sea, el valor de estos elementos para cada posición de la fuerza P = 1, se procede así:

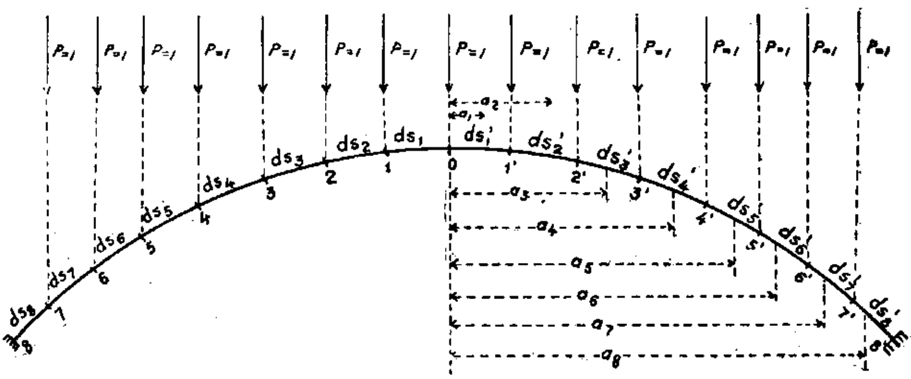


Fig. 11

Supongamos que se quiera determinar la línea de influencia de M para el caso en que P = 1 se encuentre en *O.*

$$\int_{-a}^{+a} M_0 \frac{ds}{J} = P\ a_1 . \frac{ds'_1}{J} + P . a_2 \frac{ds'_2}{J} + P . a_3 \frac{ds'_3}{J} + P . a_4 \frac{ds'_4}{J} + P . a_5 . \frac{ds'_5}{J}$$

$$+ P . a_6 \frac{ds'_6}{J} + P\ a_7 \frac{ds'_7}{J} + P\ a_8 \frac{ds'_8}{J}$$

Como P = 1.

$$\int_{-a}^{+a} M_0 \frac{ds}{J} = a_1 \frac{ds'_1}{J} + a_2 \frac{ds'_2}{J} + a_3 \frac{ds'_3}{J} + a_4 \frac{ds'_4}{J} + a_5 \frac{ds'_5}{J} + a_6 \frac{ds'_6}{J}$$

$$+ a_7 \frac{ds'_7}{J} + a_8 \frac{ds'_8}{J}$$

Si ahora se quiere determinar la línea de influencia para el caso en que P se encuentre en 1' se tendrá

$$\int \cdot/. = a_1 \frac{ds'_2}{J} + a_2 \frac{ds'_3}{J} + a_3 \frac{ds'_4}{J} + a_4 \frac{ds'_5}{J} + a_5 \frac{ds'_6}{J} + a_6 \frac{ds'_7}{J} + a_7 \frac{ds'_8}{J}$$

Y así sucesivamente. Obsérvese que el primer valor tiene 8 términos y el segundo 7. Este número va disminuyendo hasta el caso en que la fuerza esté en 7', en cuyo caso

$$\int \cdot/. = a_1 \frac{ds'_8}{J}$$

En el cuadro número 1 aparecen los valores de $\int M_0 \frac{ds}{J}$ para las diversas posiciones de las fuerzas desde *0* a 7', o sea, para todo el lado derecho del arco. En la columna (1) se ha puesto el valor de M_0 para $P = 1$, y cada término se forma multiplicando el valor correspondiente de $\frac{ds}{I}$ (el cual se encuentra indicado en las mismas columnas) por M_0.

En la parte inferior de cada columna se han hecho las sumas parciales que indican el valor de $\int M_0 \frac{ds}{I}$

Para obtener el valor correspondiente de la línea de influencia de M, basta dividir estos valores por $\int \frac{ds}{I}$ (véase formula 6).

Respecto del signo de M_0, tomaremos convencionalmente como — el momento que tiende a girar en sentido contrario a las agujas de un reloj — ♀ . Por consiguiente M_0 será siempre negativo y M será +.

Se tiene, en suma:

Para la fuerza que obra en 7', se tiene como ordenada de la línea de influencia..........	$0'_7 =$	3.90217
Para la fuerza obrando en 6'...............	$0'_6 =$	13.61100
» » » » » 5'..............	$0'_5 =$	38.35103
» » » » » 4'..............	$0'_4 =$	74.09982
» » » » » 3'..............	$0'_3 =$	124.6635
» » » » » 2'..............	$0'_2 =$	190.5915
» » » » » 1'..............	$0'_1 =$	272.8492
» » » » » 0'..............	$0'_0 =$	373.3186

Los valores de las ordenadas de la línea de influencia del lado izquierdo del arco se pueden deducir de los valores ya calculados. Propongámonos determinar la ordenada para el caso en que la fuerza obre en la sección 5.

Llamemos p la mitad de la distancia horizontal que media entre cada sección

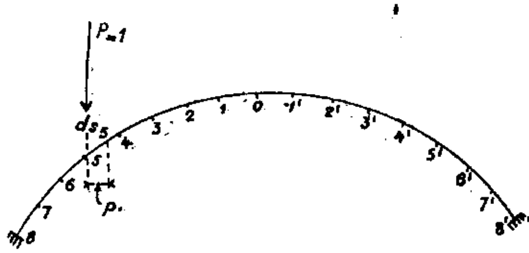


Fig. 12

$$\left(\int M_0 \frac{ds}{J}\right)_{\text{Sección } 5} = -p.\frac{ds_5}{J} - 3.p\frac{ds_4}{J} - 5.p\frac{ds_3}{J} - 7p\frac{ds_2}{J} - 9.p\frac{ds_1}{J}$$

$$- 11p\frac{ds'_1}{J_1} - 13p\frac{ds'_2}{J} - 15p\frac{ds'_3}{J} - 17.p\frac{ds_4}{J} - 19p\frac{ds'_5}{J} - 21.p\frac{ds'_6}{J}$$

$$- 23p\frac{ds'_7}{J} - 25p\frac{ds'_8}{J}$$

Como $\frac{ds_1}{J} = \frac{ds'_1}{J}$ y $\frac{ds_2}{J} = \frac{ds'_2}{J}$ y así sucesivamente, se tendrá, haciendo las reducciones del caso,

$$\left(\int M_0 \frac{ds}{J}\right)_{\text{Sección } 5} = -20.p.\frac{ds_1}{J} - 20.p\frac{ds_2}{J} - 20p\frac{ds_3}{J} - 20p\frac{ds_4}{J}$$

$$- 20.p.\frac{ds_5}{J} - 21p.\frac{ds_6}{J} - 23p\frac{ds_7}{J} - 25p.\frac{ds_8}{J}$$

Pero 20. p es 2 veces la abcsisa de la sección 5, o sea,

$$20p = 2x_5$$

$$\left(\int M_0\right) = -2x_5\left(\frac{ds_1}{J} + \frac{ds_2}{J} + \frac{ds_3}{J} + \frac{ds_4}{J} + \frac{ds_5}{J}\right) - 21p.\frac{ds_6}{J} - 23p\frac{ds_7}{J}$$

$$- 25\, p\, \frac{ds_8}{J} \quad (\alpha)$$

Para el caso en que esté la fuerza en 5' el valor de $\int M_0 \frac{ds}{J}$ es:

$$\left(\int M\, \frac{ds}{J}\right)_{\text{Sección } 5'} = -\, p\, \frac{ds'_6}{J} - 3\, p\, \frac{ds'_7}{J} - 5 .\, p\, \frac{ds'_8}{J} \quad (\beta)$$

Veamos la diferencia que hay entre las expresiones (α) y (β)

$$\underbrace{\left(\int M_0\, \frac{ds}{J}\right)_5 - \left(\int M\, \frac{ds}{J}\right)_{5'}}_{\triangle} = -\, 2\, x_5 \left(\frac{ds_1}{J} + \frac{ds_2}{J} + \frac{ds_3}{J} + \frac{ds_4}{J} + \frac{ds_5}{J}\right)$$

$$- 21\, p\, \frac{ds_6}{J} - 23\, p\, \frac{ds_7}{J} - 25\, p\, \frac{ds_8}{J} + p\, \frac{ds_6}{J} + 3\, p\, \frac{ds_7}{J} + 5\, p\, \frac{ds_8}{J}$$

$$= -\, 2\, x_5 \left(\frac{ds_1}{J} + \frac{ds_2}{J} + \frac{ds_3}{J} + \frac{ds_4}{J} + \frac{ds_5}{J}\right) - 20\, p\, \frac{ds_6}{J} - 20\, p\, \frac{ds_7}{J} - 20\, p\, \frac{ds_8}{J}$$

O sea, $\triangle = -\, 2\, x_5 \left(\frac{ds_1}{J} + \frac{ds_2}{J} + \frac{ds_3}{J} + \frac{ds_4}{J} + \frac{ds_5}{J} + \frac{ds_6}{J} + \frac{ds_7}{J} + \frac{ds_8}{J}\right.$

Pero la cantidad entre paréntesis es $\frac{1}{2} \int \frac{ds}{J}$

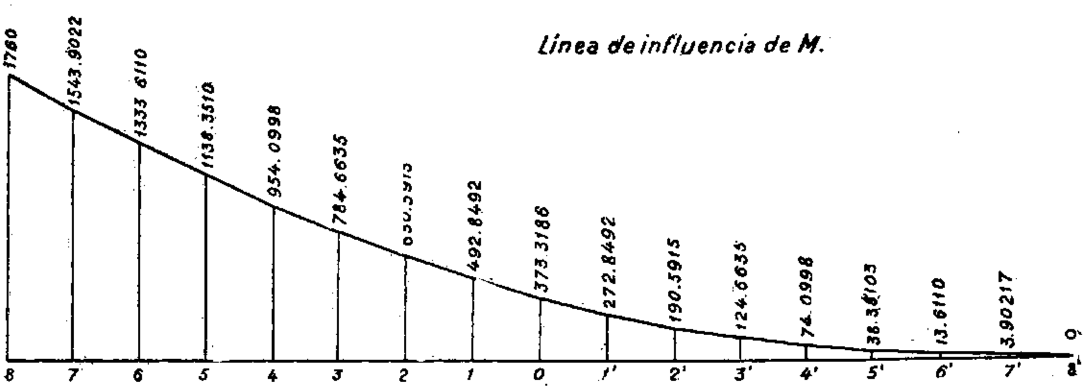
$$\triangle = -\, x_5 \int \frac{ds}{J}$$

Se sabe que $M_{5'} = - \frac{\left(\int M_0\, \frac{ds}{J}\right)_{5'}}{\int \frac{ds}{J}}$

$$\text{y} \qquad M_5 = -\frac{\left(\int M_o \frac{ds}{J}\right)_5}{\int \frac{ds}{J}}$$

$$M'_5 - M_{5'} = \frac{\left(\int M_o \frac{ds}{J}\right)_5 - \left(\int M_o \frac{ds}{J}\right)_{5'}}{\int \frac{ds}{J}} = \frac{\Delta}{\int \frac{ds}{J}}$$

$$M'_5 - M_5 = \frac{-\,x_5 \int \frac{ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}} = -\,x_5$$



Fig, 13

$$\therefore \; M_5 = M'_5 + x_5$$

O sea, la ordenada de una sección cualquiera del lado izquierdo del arco puede obtenerse agregando a la ordenada correspondiente del lado derecho la abcisa de la sección en que está la fuerza.

Según esto, se tiene:

Ordenada para la fuerza obrando en 1, o sea O_1

$$
\begin{aligned}
O_1 &= 272.8492 + 220 = 492.8492\\
O_2 &= 190.5915 + 440 = 630.5915\\
O_3 &= 124.6635 + 660 = 784.6635\\
O_4 &= 74.09982 + 880 = 954.0998\\
O_5 &= 38.35103 + 1138 = 1138.3510\\
O_6 &= 13.61100 + 1320 = 1333.6110\\
O_7 &= 3.90217 + 1540 = 1543.9022\\
O_8 &= 0 + 1760 = 1760
\end{aligned}
$$

CÁLCULO DE $\int M_o \frac{ds}{J}$ y. Y LINEA DE INFLUENCIA DE H.

El valor de $\int M_o \frac{ds}{J}$. y para la posición de cada fuerza P = 1, se puede deducir de los valores ya calculados para $\int M_o \frac{ds}{J}$. Basta solamente multiplicar cada término por la ordenada y que le corresponde, o sea, por la or-

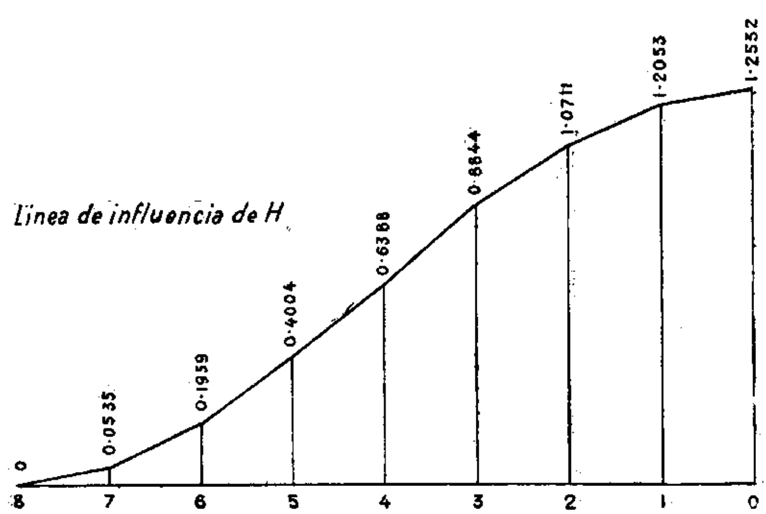


Fig. 14

denada del centro de gravedad de ds. Así se ha hecho en el cuadro número 2.

Para obtener los valores de las ordenadas de la linea de influencia de H, hay que dividir estos valores por $\int \frac{ds\, y_2}{J} + \int \frac{ds}{F} = 26.779\ 409\ 110.$

Cuando la fuerza obra en 8' .... $h_{8'} = 0$

» » » » » 7', $h_{7'} = \frac{1.431\ 983\ 85}{26.779\ 409\ 110}$ ... $h_{7'} = +\ 0.0535$

» » » » » 6' .... $h_{6'} = +\ 0.1959$

» » » » » 5' .... $h_{5'} = +\ 0.4004$

» » » » » 4' .... $h_{4'} = +\ 0.6388$

» » » » » 3' .... $h_{3'} = +\ 0.8844$

» » » » » 2' .... $h_2 = +\ 1.0711$

» » » » » 1' .... $h_{1'} = +\ 1.2053$

» » » » » 0 .... $h_0 = +\ 1.2532$

Las ordenadas del lado izquierdo del arco son iguales a las correspondientes del lado derecho.

CALCULO DE $\int M_0 \frac{ds}{J}$ x Y LINEA DE INFLUENCIA DE V

Este valor se puede también deducir de los ya calculados para $\int M_0 \frac{ds}{J}$, para lo cual es sólo preciso multiplicar cada término por la abcisa x que corresponde a cada centro de gravedad de ds. En esta forma se ha hecho el cuadro número 3.

Las ordenadas de la línea de influencia se obtienen dividiendo los valores del cuadro por $\int \frac{x^2\, ds}{J} = 654.010\ 9774$

Cuando la fuerza obra en 8' .... $v'_8 = 0$

» » » » » 7', $v'_7 = \frac{5.356\ 791}{654.010\ 9774}$ $v'_7 = 0.008\ 107$

» » » » » 6', $v'_6 = \frac{21.077\ 5466}{654.010\ 9774}$ $v'_5 = 0.032\ 23$

Cuando la fuerza obra en 5', $v'_5 = \frac{48.061\ 3089}{654.010\ 9774}\ v'_5 = 0.07\ 344$

» » » » » 4', $v'_4 = \frac{87.147\ 8542}{654.010\ 9774}\ v'_4 = 0.13\ 325$

» » » » » 3', $v'_3 = \frac{137.024\ 5261}{654.010\ 9774}\ v'_3 = 0.20\ 981$

» » » » » 2', $v'_2 = \frac{195.344\ 1182}{654.010\ 9774}\ v'_2 = 0.39\ 868$

» » » » » 1', $v'_1 = \frac{259.546\ 9481}{654.010\ 9774}\ v'_1 = 0.39\ 686$

» » » » » 0', $v'_0 = \frac{327.005\ 4887}{654.010\ 9774}\ v'_0 = 0.5$

(*Continuará*).

VALOR DE $\int M_o \frac{ds}{J}$ PARA EL USO EN QUE $P = 1$

Valor de $\int M_o \frac{ds}{J}$ para las distintas posiciones de las fuerzas que se expresan en las columnas

1 M_o para $P=1$	2 Fuerza en 7'		3 Fuerza en 6'		4 Fuerza en 5'		5 Fuerza en 4'		6 Fuerza en 3'		7 Fuerza en 2'		8 Fuerza en 1'		9 Fuerza en 0'	
110	$\frac{ds'_8}{J}$	0. 003 246 54	$\frac{ds'_7}{J}$	0. 003 501 52	$\frac{ds'_6}{J}$	0. 005 170 11	$\frac{ds'_5}{J}$	0. 005 906 01	$\frac{ds'_4}{J}$	0. 006 419 71	$\frac{ds'_3}{J}$	0. 006 363 17	$\frac{ds'_2}{J}$	0. 007 222 71	$\frac{ds'_1}{J}$	0. 007 929 24
330	Σ	= 0. 003 246 54	$\frac{ds'_8}{J}$	0. 009 739 62	$\frac{ds'_7}{J}$	0. 010 504 56	$\frac{ds'_6}{J}$	0. 015 510 33	$\frac{ds'_5}{J}$	0. 017 718 03	$\frac{ds'_4}{J}$	0. 019 259 13	$\frac{ds'_3}{J}$	0. 019 089 51	$\frac{ds'_2}{J}$	0. 021 668 13
550			Σ	= 0. 013 241 14	$\frac{ds'_8}{J}$	0. 016 232 70	$\frac{ds'_7}{J}$	0. 017 507 60	$\frac{ds'_6}{J}$	0. 025 850 55	$\frac{ds'_5}{J}$	0. 029 530 05	$\frac{ds'_4}{J}$	0, 032 098 55	$\frac{ds'_3}{J}$	0. 031 815 85
770					Σ	= 0. 031 907 37	$\frac{ds'_8}{J}$	0. 022 725 78	$\frac{ds'_7}{J}$	0. 024 510 64	$\frac{ds'_5}{J}$	0. 036 190 77	$\frac{ds'_5}{J}$	0. 041 342 07	$\frac{ds'_4}{J}$	0. 044 937 97
990							Σ	= 0. 061 649 72	$\frac{ds'_8}{J}$	0. 029 218 86	$\frac{ds'_7}{J}$	0. 031 513 68	$\frac{ds'_6}{J}$	0. 046 530 99	$\frac{ds'_5}{J}$	0. 053 154 09
1 210									Σ	= 0. 103 717 79	$\frac{ds'_8}{J}$	0. 035 711 94	$\frac{ds'_7}{J}$	0. 038 516 72	$\frac{ds'_6}{J}$	0. 056 871 21
1 430											Σ	= 0. 158 568 74	$\frac{ds'_8}{J}$	0. 042 205 02	$\frac{ds'_7}{J}$	0. 045 519 76
1 650													Σ	= 0. 227 005 57	$\frac{ds'_8}{J}$	0. 048 698 10
															Σ	= 0. 310 594 35

Ejemplo: Se pide determinar el valor de $\int M_o \frac{ds}{J}$ para el caso en que $P = 1$ esté en sección 4'

Basta multiplicar

$$
\begin{aligned}
& 110 \times \frac{ds'_5}{J} = 0.005\,906\,01 \\
+ \; & 330 \times \frac{ds'_6}{J} = 0.015\,510\,33 \\
+ \; & 550 \times \frac{ds'_7}{J} = 0.017\,507\,60 \\
+ \; & 770 \times \frac{ds'_8}{J} = 0.022\,725\,78 \\
& \int M_o \frac{ds}{J} = 0.061\,649\,72
\end{aligned}
$$

Los valores de $\frac{ds}{J}$ se encuentran en pájina 15.

CUADRO N.º 2

$$\text{VALOR DE} \int M_0 \frac{ds}{J} \cdot y$$

Valor de $\int M_0 \frac{I\ ds}{J}$ para las posiciones de las fuerzas que se expresan en las columnas

1 M_0 por $P = 1$	2 Fuerza en 7'	3 Fuerza en 6'	4 Fuerza en 5'	5 Fuerza en 4'	6 Fuerza en 3'	7 Fuerza en 2'	8 Fuerza en 1'	9 Fuerza en 0
110	$\frac{ds'_8}{J}$ + 1.431 983 85	$\frac{ds'_7}{J}$ + 0.949 192 09	$\frac{ds'_6}{J}$ + 0,713 888 78	$\frac{ds'_5}{J}$ + 0.195 370 78	$\frac{ds'_4}{J}$ — 0.301 212 78	$\frac{ds'_3}{J}$ — 0.680 350 11	$\frac{ds'_2}{J}$ — 1,025 046 99	$\frac{ds'_1}{J}$ — 1.283 902 51
330	Σ = + 1.431 983 85	$\frac{ds'_8}{J}$ + 4.295 951 55	$\frac{ds'_7}{J}$ + 2,847 576 27	$\frac{ds'_6}{J}$ + 2 141 666 34	$\frac{ds'_5}{J}$ + 0.586 112 34	$\frac{ds'_4}{J}$ — 0.903 638 34	$\frac{ds'_3}{J}$ — 2.041 050 33	$\frac{ds'_2}{J}$ — 3.075 140 47
550		Σ = + 5.245 143 64	$\frac{ds'_8}{J}$ + 7.159 919 25	$\frac{ds'_7}{J}$ + 4.745 960 45	$\frac{ds'_6}{J}$ + 3.569 443 90	$\frac{ds'_5}{J}$ + 0.976 853 90	$\frac{ds'_4}{J}$ — 1.506 063 90	$\frac{ds'_3}{J}$ — 3.401 750 55
770			Σ + + 10 721 384 30	$\frac{ds'_8}{J}$ + 10.023 886 95	$\frac{ds'_7}{J}$ + 6.644 344 63	$\frac{ds'_6}{J}$ + 4.997 221 46	$\frac{ds'_5}{J}$ + 1.367 595 46	$\frac{ds'_4}{J}$ — 2.108 489 46
990				Σ + + 17 106 884 52	$\frac{ds'_8}{J}$ + 12.887 854 65	$\frac{ds'_7}{J}$ + 8.542 728 81	$\frac{ds'_6}{J}$ + 6.424 999 02	$\frac{ds'_5}{J}$ + 1.758 337 02
1210					Σ = + 23 386 542 74	$\frac{ds'_8}{J}$ + 15·751 822 35	$\frac{ds'_7}{J}$ + 10,441 112 99	$\frac{ds'_6}{J}$ + 7.852 776 58
1430						Σ = + 28.684 638 07	$\frac{ds'_8}{J}$ + 18.615 790 05	$\frac{ds'_7}{J}$ + 12.339 497 17
1650							Σ = + 32.277 336 30	$\frac{ds'_8}{J}$ + 21.479 757 75
								Σ = + 33.561 085 03

Cuadro 3

Valor de $\int M_0 \frac{ds}{J} x$

Valor de $\int M_0 \frac{ds}{J} x$ para las posiciones de las fuerzas que se expresan en las columnas								
1 M_0 para P = I	2 Fuerza en 7'	3 Fuerza en 6'	4 Fuerza en 5'	5 Fuerza en 4'	6 Fuerza en 3'	7 Fuerza en 2'	8 Fuerza en 1'	9 Fuerza en 0
110	$\frac{ds'_8}{J}$ + 5.356 791	$\frac{ds'_7}{J}$ + 5.007 1736	$\frac{ds'_6}{J}$ + 6.255 8331	$\frac{ds'_5}{J}$ + 5.846 9499	$\frac{ds'_4}{J}$ + 4.943 1767	$\frac{ds'_3}{J}$ + 3,499 7435	$\frac{ds'_2}{J}$ + 2.383 4943	$\frac{ds'_1}{J}$ + 0.872 2164
330	Σ = + 5 356 791	$\frac{ds'_8}{J}$ + 16.070 3730	$\frac{ds'_7}{J}$ + 15.021 5208	$\frac{ds'_6}{J}$ + 18.767 4993	$\frac{ds'_5}{J}$ + 17.540 8496	$\frac{ds'_4}{J}$ + 14,829 5301	$\frac{ds'_3}{J}$ + 10.499 2301	$\frac{ds'_2}{J}$ + 7.150 4849
550		Σ = + 20 077 5466	$\frac{ds'_8}{J}$ + 26.783 9550	$\frac{ds'_7}{J}$ + 25.035 8680	$\frac{ds'_6}{J}$ + 31.279 1655	$\frac{ds'_5}{J}$ + 29,234 7495	$\frac{ds'_4}{J}$ + 24.715 8835	$\frac{ds'_3}{J}$ + 17.498 7175
770			Σ = + 48361 3089	$\frac{ds'_8}{J}$ + 37.497 5370	$\frac{ds'_7}{J}$ + 35.050 2122	$\frac{ds'_6}{J}$ + 43.790 8317	$\frac{ds'_5}{J}$ + 40.928 6493	$\frac{ds'_4}{J}$ + 34.602 2369
990				Σ = + 87.147 8542	$\frac{ds'_8}{J}$ + 48.211 1190	$\frac{ds'_7}{J}$ + 45.064 5624	$\frac{ds'_6}{J}$ + 56.302 4979	$\frac{ds'_5}{J}$ + 52.622 5491
1210					Σ = + 137.024 5269	$\frac{ds'_8}{J}$ + 58.924 7010	$\frac{ds'_7}{J}$ + 55.078 9096	$\frac{ds'_6}{J}$ + 68 814 1641
1430						Σ = + 195.344 1182	$\frac{ds'_8}{J}$ + 69.638 2830	$\frac{ds'_7}{J}$ + 65.093 2568
1650							Σ = + 259.546 9481	$\frac{ds'_8}{J}$ + 80.351 8650
								Σ = = 327 005 4887