Vectores trigonométricos

POR SALOMÓN CHORNIK STEINGARD, ingeniero civil

1.—DEFINICIONES DE LOS VECTORES sen $\vec{v}$ Y cos $\vec{v}$

Consideremos un sistema ortogonal de coordenadas X, Y y los vectores unitarios $\vec{h}$ e $\vec{i}$ cuyas direcciones coinciden con los ejes X e Y respectivamente (fig. 1).

En este sistema un vector $\vec{v}$ cualquiera puede expresarse, siendo α y β dos variables escalares por la forma

$$\vec{v} = {}_{\alpha}\vec{h} - {}_{\beta}\vec{i}$$

Definimos los vectores trigonométricos sen $\vec{v}$ (seno del vector $\vec{v}$) y cos $\vec{v}$ (coseno del vector $\vec{v}$) en relación con el sistema de ejes coordenados X, Y por las expresiones

$$1) \qquad \text{sen}\,\vec{v} = \cos\alpha \text{Sh}\beta \cdot \vec{h} + \text{sen}\alpha \text{Ch}\beta \cdot \vec{i}$$

$$2) \qquad \cos\vec{v} = \cos\alpha \text{Ch}\beta \cdot \vec{h} + \text{sen}\alpha \text{Sh}\beta \cdot \vec{i}$$

En el caso particular $\beta = O$ o sea $\vec{v} = \alpha\vec{h}$ se tiene

$$\text{sen}\,\vec{v} = \text{sen}\alpha\vec{i} \qquad \cos\vec{v} = \cos\alpha \cdot \vec{h}$$

y considerando las magnitudes escalares de los vectores

$$\left|\text{sen}\,\vec{v}\right| = \text{sen}\alpha \qquad \left|\cos\vec{v}\right| = \cos\alpha\ .$$

Es decir los vectores sen $\vec{v}$ y cos $\vec{v}$ en el caso $\beta = O$ coinciden en dirección con los ejes Y y X respectivamente y sus magnitudes escalares corresponden a las

---

Obsérvese la correspondencia de las expresiones 1) y 2) con el desarrollo de los complejos

$$i\,.\,\text{sen}\,(\alpha - i\beta) = \cos\alpha\text{Sh}\beta + i\,.\,\text{sen}\alpha\text{Ch}\beta$$
$$\cos\,(\alpha - i\beta) = \cos\alpha\text{Ch}\beta + i\,.\,\text{sen}\alpha\text{Sh}\beta$$

funciones circulares trigonométricas, como resulta de las definiciones de estas funciones en el círculo.

En el caso particular $\alpha = O$ o sea $\vec{v} = -\beta \cdot \vec{i}$ se tiene

$$\operatorname{sen} \vec{v} = \operatorname{Sh}\beta \cdot \vec{h} \qquad \cos \vec{v} = \operatorname{Ch}\beta \cdot \vec{h}$$

y considerando las magnitudes escalares

$$\left|\operatorname{sen} \vec{v}\right| = \operatorname{Sh}\beta \qquad \left|\cos \vec{v}\right| = \operatorname{Ch}\beta$$

Es decir los vectores sen $\vec{v}$ y cos $\vec{v}$ en el caso $\alpha = O$ tienen sus direcciones coincidentes con el eje X. Sus magnitudes escalares corresponden a las funciones hiperbólicas $\operatorname{Sh}\beta$ y $\operatorname{Ch}\beta$.

2.—Propiedades fundamentales de los vectores sen $\vec{v}$ y cos $\vec{v}$

A.—Propiedades escalares de los vectores sen $\vec{v}$ y cos $\vec{v}$.

De acuerdo con las definiciones establecidas

$$\left|\operatorname{sen} \vec{v}\right| = \sqrt{\cos^2\alpha \cdot \operatorname{Sh}^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \operatorname{Ch}^2\beta}$$

de donde reemplazando $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$ y $\operatorname{Ch}^2\beta = 1 + \operatorname{Sh}^2\beta$ se obtiene

$$3) \qquad \left|\operatorname{sen} \vec{v}\right| = \sqrt{\operatorname{Sh}^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha}$$

o

$$3') \qquad \left|\operatorname{sen} \vec{v}\right| = \sqrt{\tfrac{1}{2}\operatorname{Ch} 2\beta - \cos 2\alpha}$$

En igual forma

$$\left|\cos \vec{v}\right| = \sqrt{\cos^2\alpha \cdot \operatorname{Ch}^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \operatorname{Sh}^2\beta}$$

de donde

$$4) \qquad \left|\cos \vec{v}\right| = \sqrt{\operatorname{Ch}^2\beta + \cos^2\alpha - 1}$$

o

$$4') \qquad \left|\cos \vec{v}\right| = \sqrt{\operatorname{Ch} 2\beta + \cos 2\alpha}$$

Formando la suma y resta de los cuadrados en 3') y 4')

$$5) \qquad \left|\cos \vec{v}\right|^2 + \left|\operatorname{sen} \vec{v}\right|^2 = \operatorname{Ch} 2\beta$$

$$6) \qquad \left|\cos \vec{v}\right|^2 - \left|\operatorname{sen} \vec{v}\right|^2 = \cos 2\alpha$$

y los productos algebraicos en 3) y 4) y 3') y 4')

$$7) \qquad \left|\operatorname{sen} \vec{v}\right| \cdot \left|\cos \vec{v}\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Ch}^2 2\beta - \cos^2 2\alpha}$$

$$7') \qquad \left|\operatorname{sen} \vec{v}\right| \cdot \left|\cos \vec{v}\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Sh}^2 2\beta + \operatorname{sen}^2 2\alpha}$$

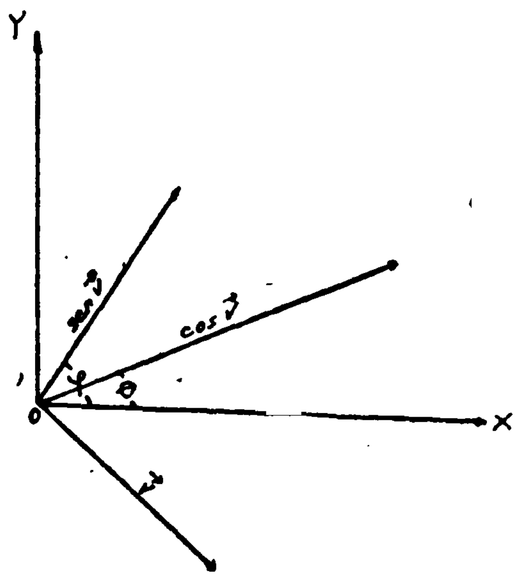

fig 1.

En el caso particular $\beta = O$ las fórmulas 5 y 6, 7 y 7' se convierten en las fórmulas de la trigonometría rectilínea

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha$$
$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha$$

En el caso particular $\alpha = O$ las mismas fórmulas se convierten en las fórmulas de la trigonometría hiperbólica

$$\mathrm{Ch}^2\beta + \mathrm{Sh}^2\beta = \mathrm{Ch}\, 2\beta$$
$$\mathrm{Ch}^2\beta - \mathrm{Sh}^2\beta = 1$$
$$\mathrm{Sh}\beta \cdot \mathrm{Ch}\beta = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{Sh}\, 2\beta$$

B.—Propiedades vectoriales de los vectores sen $\vec{v}$ y cos $\vec{v}$.

a) Argumentos de los vectores sen $\vec{v}$ y cos $\vec{v}$.

Sean φ y Θ los ángulos que forman los vectores sen $\vec{v}$ y cos $\vec{v}$ con el eje X (fig 1). De las definiciones fundamentales siendo $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{Ch}\beta$ y $\cos\alpha \operatorname{Ch}\beta$ las componentes del vector sen $\vec{v}$ tenemos

$$\text{8)} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{Th}\beta}$$

Siendo $\cos\alpha \operatorname{Ch}\beta$ y $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{Sh}\beta$ las componentes del vector cos $\vec{v}$.

$$\text{9)} \qquad \operatorname{tg}\Theta = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{Th}\beta$$

De 8) y 9) deducimos las funciones del ángulo $\varphi - \Theta$.

$$\text{10)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi - \Theta) = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{Sh} 2\beta}$$

$$\text{11)} \qquad \operatorname{sen}(\varphi - \Theta) = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{Sh}^2 2\beta + \operatorname{sen}^2 2\alpha}$$

$$\text{12)} \qquad \cos(\varphi - \Theta) = \frac{\operatorname{Sh} 2\beta}{\operatorname{Sh}^2 2\beta + \operatorname{sen}^2 2\alpha}$$

b) Producto escalar ($\cos\vec{v} \cdot \operatorname{sen}\vec{v}$).

El producto escalar ($\cos v \cdot \operatorname{sen} v$) está definido por

$$\left(\cos\vec{v} \cdot \operatorname{sen}\vec{v}\right) = \left|\operatorname{sen}\vec{v}\right| \cdot \left|\cos\vec{v}\right| \cdot \cos(\varphi - \Theta) \; .$$

En virtud de 7') y 12) tenemos

$$\text{13)} \qquad \left(\cos\vec{v} \cdot \operatorname{sen}\vec{v}\right) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Sh} 2\beta$$

es decir dicho producto escalar es independiente de la variable α.

c) Producto vectorial $\left[\cos\vec{v} \cdot \operatorname{sen}\vec{v}\right]$

El producto vectorial $\left[\cos\vec{v} \cdot \operatorname{sen}\vec{v}\right]$ siendo $\vec{j}$ un vector unitario normal al plano formado por $\vec{h}$ e $\vec{i}$ está definido por

$$\left[\cos\vec{v} \cdot \operatorname{sen}\vec{v}\right] = \left|\cos\vec{v}\right| \cdot \left|\operatorname{sen}\vec{v}\right| \cdot \operatorname{sen}(\varphi - \Theta) \cdot \vec{j}$$

y en virtud de 7) y 11)

$$14) \qquad \left[\cos \vec{v} \cdot \operatorname{sen} \vec{v}\right] = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \vec{j}$$

lo cual significa que el producto vectorial indicado es independiente de la variable β.

3.—Vectores $\cos \vec{v} + \operatorname{sen} \vec{v}$ y $\cos \vec{v} - \operatorname{sen} \vec{v}$

Refiriéndonos a la figura 2 tenemos representados en OA y OB los vectores $\cos \vec{v}$ y $\operatorname{sen} \vec{v}$ respectivamente. De la composición de dichos vectores resulta

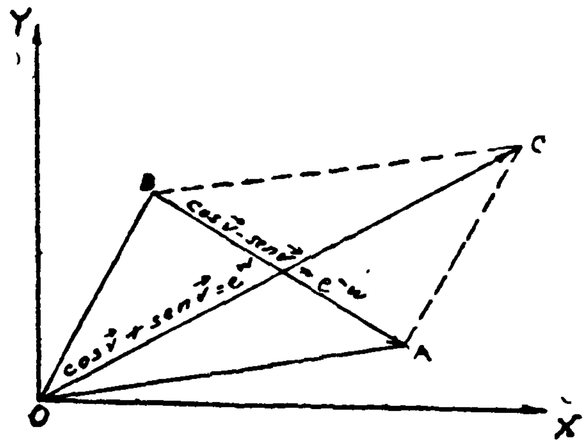

fig 2

$$OC = \cos \vec{v} + \operatorname{sen} \vec{v}$$
$$BA = \cos \vec{v} - \operatorname{sen} \vec{v}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo OBC obtenemos

$$\left|\cos \vec{v} + \operatorname{sen} \vec{v}\right|^2 = \left|\cos \vec{v}\right|^2 + \left|\operatorname{sen} \vec{v}\right|^2 + 2\left|\cos \vec{v}\right| \cdot \left|\operatorname{sen} \vec{v}\right| \cdot \cos(\varphi - \theta)$$

y en virtud de 5) y 13)

$$\left|\cos \vec{v} + \operatorname{sen} \vec{v}\right|^2 = \operatorname{Ch} 2\beta + \operatorname{Sh} 2\beta$$

y teniendo presente que $\operatorname{Ch} 2\beta + \operatorname{Sh} 2\beta = e^{2\beta}$ se tiene

$$15) \qquad \left|\cos \vec{v} + \operatorname{sen} \vec{v}\right| = e^{\beta}$$

que se traduce en la figura en $OC = e^{\beta}$.

En igual forma del triángulo OBA deducimos

$$\left|\cos \vec{v} - \text{sen}\,\vec{v}\right|^2 = \text{Ch}\,2\beta - \text{Sh}\,2\beta$$

y teniendo presente que $\text{Ch}2\beta - \text{Sh}2\beta = e^{-2\beta}$ se tiene

16) $$\left|\cos \vec{v} - \text{sen}\,\vec{v}\right| = e^{-\beta}$$

que se traduce en la figura en $BA = e^{-\beta}$.

Multiplicando 15) y 16) resulta

17) $$\left|\cos \vec{v} + \text{sen}\,\vec{v}\right| \cdot \left|\cos \vec{v} - \text{sen}\,\vec{v}\right| = 1$$

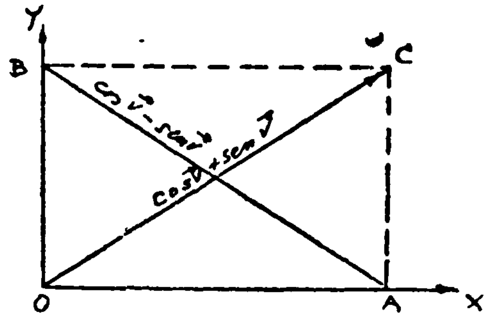

fig 3

que se traduce en la figura en $OC \cdot BA = 1$

y en palabras el producto de las magnitudes escalares de los vectores $\cos \vec{v} + \text{sen}\,\vec{v}$ y $\cos \vec{v} - \text{sen}\,\vec{v}$ es constante e igual a la unidad. Si $\beta = O$ se verifica siendo $OC = BA = 1$ una identidad (fig. 3).

Demostramos además la propiedad, que es evidente por definición en el caso de las funciones circulares, de que los vectores $\text{sen}\,\vec{v} + \cos \vec{v}$ y $\text{sen}\,\vec{v} - \text{sen}\,\vec{v}$ forman con el eje X el ángulo α y $-\alpha$ respectivamente.

En efecto proyectando los vectores $\text{sen}\,\vec{v}$, $\cos \vec{v}$ y su resultante $\cos \vec{v} + \text{sen}\,\vec{v}$ sobre el eje X y aceptando que el vector $\cos \vec{v} + \text{sen}\,\vec{v}$ forma el ángulo α con el eje X tenemos la identidad

$$\cos\alpha\,\text{Ch}\beta + \cos\alpha\,\text{Sh}\beta = e^{\beta}\cos\alpha$$

En igual forma proyectando los vectores cos $\vec{v}$, — sen $\vec{v}$ y su resultante cos $\vec{v}$ — sen $\vec{v}$ sobre el eje X y aceptando que el vector cos $\vec{v}$ — sen $\vec{v}$ forma el ángulo — α con el eje X tenemos la identidad

$$\cos\alpha \mathrm{Ch}\beta - \cos\alpha \mathrm{Sh}\beta = e^{-\beta}\cos\alpha$$

En adelante emplearemos para estos vectores los símbolos

18) $$e^{\vec{w}} = \cos \vec{v} + \mathrm{sen}\ \vec{v}$$

19) $$e^{-\vec{w}} = \cos \vec{v} - \mathrm{sen}\ \vec{v}$$

definiendo $\vec{w}$ un vector de igual magnitud y normal a $\vec{v}$ o sea

$$\vec{w} = \beta\vec{h} + \alpha\vec{i}$$

Considerando de acuerdo con las propiedades estudiadas que los vectores $e^{\vec{w}}$ y $e^{-\vec{w}}$ tienen respectivamente magnitudes e^{β} y $e^{-\beta}$ y están inclinados con respecto al eje X de ángulos α y — α estos pueden expresarse en la forma

20) $$e^{\vec{w}} = e^{\beta} \cos\alpha \cdot \vec{h} + e^{\beta} \mathrm{sen}\alpha \cdot \vec{i}$$

21) $$e^{-\vec{w}} = e^{-\beta} \cos\alpha \vec{h} - e^{-\beta} \mathrm{sen}\alpha \cdot \vec{i}$$

4.—Definiciones de los vectores sec $\vec{v}$ y cosec $\vec{v}$

Definimos el vector sec $\vec{v}$ (secante del vector $\vec{v}$) como un vector de igual dirección que cos $\vec{v}$ y magnitud igual al valor recíproco de la magnitud del vector cos $\vec{v}$. En forma similar definimos el vector cosec $\vec{v}$ (cosecante del vector $\vec{v}$) como un vector de igual dirección que sen $\vec{v}$ y magnitud igual al valor recíproco de la magnitud del vector sen $\vec{v}$ (fig. 4).

Por lo tanto, las magnitudes de estos vectores son

22) $$\left|\sec \vec{v}\right| = \frac{1}{\left|\cos \vec{v}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{Ch}\ 2\beta + \cos 2\alpha)}}$$

Haciendo $\beta = 0$ el vector $e^{\vec{w}}$ se reduce a $e^{\alpha i}$ vector que en la forma $e^{i\alpha}$ es muy empleado en Electrotecnia.

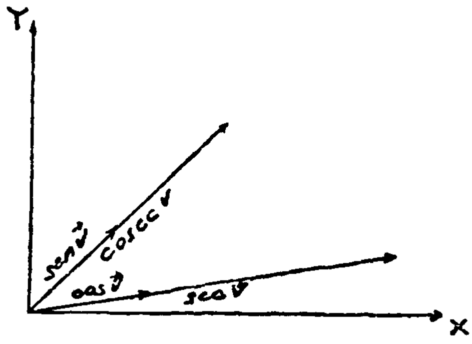

fig 4

$$23) \qquad \left|\mathrm{cosec}\,\vec{v}\right| = \frac{1}{\left|\mathrm{sen}\,\vec{v}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(\mathrm{Ch}\,2 - \cos 2\alpha}$$

De acuerdo con las definiciones estos vectores tienen por expresión

$$24) \qquad \sec \vec{v} = \frac{2}{\mathrm{Ch}2\theta + \cos2\alpha}\left(\cos\alpha\mathrm{Ch}\beta\cdot\vec{h} + \mathrm{sen}\alpha\mathrm{Sh}\beta\cdot\vec{i}\right)$$

$$25) \qquad \mathrm{cosec}\,\vec{v} = \frac{2}{\mathrm{Ch}2\beta - \cos2\alpha}\left(\cos\alpha\mathrm{Sh}\beta\cdot\vec{h} + \mathrm{sen}\alpha\mathrm{Ch}\beta\cdot\vec{i}\right)$$

5.—Definiciones de los vectores $\mathrm{tg}\,\vec{v}$ y $\mathrm{cotg}\,\vec{v}$

Definimos el vector $\mathrm{tg}\,\vec{v}$ (tangente del vector $\vec{v}$) como un vector de magnitud igual al cuociente entre las magnitudes de los vectores $\mathrm{sen}\,\vec{v}$ y $\cos\vec{v}$ y de argumento igual a la diferencia de los argumentos de dichos vectores. Definimos el vector $\mathrm{cotg}\,\vec{v}$ (cotangente del vector $\vec{v}$) como un vector de magnitud igual al valor recíproco de la magnitud de $\mathrm{tg}\,\vec{v}$ y de argumento igual al complemento del argumento de $\mathrm{tg}\,\vec{v}$ (fig. 5).

Por lo tanto, las magnitudes de estos vectores son

$$26) \qquad \left|\mathrm{tg}\,\vec{v}\right| = \frac{\left|\mathrm{sen}\,\vec{v}\right|}{\left|\cos\vec{v}\right|} = \frac{\mathrm{Ch}2\beta - \cos2\alpha}{\mathrm{Ch}2\beta + \cos2\alpha}$$

$$27) \qquad \left|\mathrm{cotg}\,\vec{v}\right| = \frac{1}{\left|\mathrm{tg}\,\vec{v}\right|} = \frac{\mathrm{Ch}2\beta + \cos2\alpha}{\mathrm{Ch}2\beta - \cos2\alpha}$$

De acuerdo con las definiciones estos vectores tienen por expresión

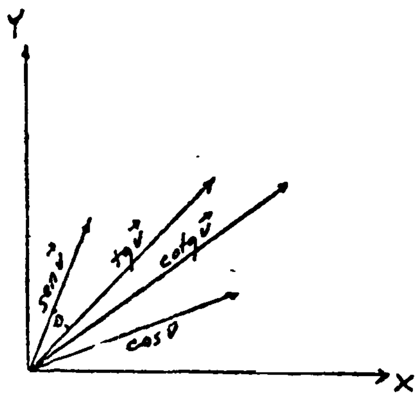

fig 5

$$\vec{tg\,v} = \left|\vec{tg\,v}\right| \cos(\varphi - \Theta)\,\vec{h} + \left|\vec{tg\,v}\right| \operatorname{sen}(\varphi - \Theta)\,\vec{i}$$

teniendo presente 11) y 12)

28) $$\vec{tg\,v} = \frac{1}{Ch2\beta + \cos 2\alpha}\left(Sh2\beta \cdot \vec{h} + \operatorname{sen}2\alpha \cdot \vec{i}\right)$$

29) $$\vec{cotg\,v} = \frac{1}{Ch2\beta - \cos 2\alpha}\left(\operatorname{sen}2\alpha \cdot \vec{h} + Sh2\beta \cdot \vec{i}\right)$$

6.—Vectores trigonométricos inversos

A) Vector Log $\vec{v}$.

Definimos el vector Log $\vec{v}$ (logaritmo del vector $\vec{v}$) como un vector tal que el vector $e^{\mathrm{Log}\,\vec{v}}$ igual a $\vec{v}$ o sea

$$\vec{v} = e^{\mathrm{Log}\,\vec{v}}$$

Si y, x son las componentes del vector Log $\vec{v}$ sobre las direcciones $\vec{h}$ e $\vec{i}$ respectivamente tenemos

$$\mathrm{Log}\,\vec{v} = y\,\vec{h} + x\,\vec{i}$$

de donde según 20)

$$\vec{v} = e^{\mathrm{Log}\,\vec{v}} = e^{y}\cos x \cdot \vec{h} + e^{y}\operatorname{sen} x \cdot \vec{i}$$

por lo tanto siendo $\vec{v} = \alpha\,\vec{h} - \beta\,\vec{i}$

resulta
$$\alpha = e^y \cos x$$
$$\beta = -e^y \operatorname{sen} x$$

de donde

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$$
$$y = \tfrac{1}{2} \operatorname{Log} (\alpha^2 + \beta^2)$$

luego obtenemos la expresión de Log $\vec{v}$

$$\operatorname{Log} \vec{v} = \tfrac{1}{2} \operatorname{Log} (\alpha^2 + \beta^2) \vec{h} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha} \vec{i} \tag{30}$$

B) Vector vect cos $\vec{v}$

Definimos el vect cos $\vec{v}$ como un vector tal que el vector cos (vectcos $\vec{v}$) sea igual a $\vec{v}$ o sea

$$\vec{v} = \cos (\text{vectcos } \vec{v})$$

Si x, y son las componentes del vector vectcos $\vec{v}$ sobre las direcciones $\vec{h}$ e $\vec{i}$ respectivamente tenemos

$$\text{vect cos } \vec{v} = x \cdot \vec{h} - y \vec{i}$$

de donde según 2)

$$\vec{v} = \cos v (\text{vectcos } \vec{v}) = \cos x \operatorname{Ch} y \cdot \vec{h} + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{Sh} y \cdot \vec{i}$$

por lo tanto siendo
$$v = \alpha \vec{h} - \beta \vec{i}$$

$$\alpha = \cos x \operatorname{Ch} y$$
$$\beta = -\operatorname{sen} x \operatorname{Sh} y$$

De este sistema de ecuaciones se determina x e y obteniéndose

$$x = \tfrac{1}{2} \arccos \xi$$
$$y = -\tfrac{1}{2} \operatorname{ár\,Ch} \xi$$

siendo
$$\xi = (\alpha^2 + \beta^2) = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha^2 - \beta^2) + 1}$$

por lo tanto

$$\text{vectcos } \vec{v} = \tfrac{1}{2} \arccos \xi \cdot \vec{h} + \tfrac{1}{2} \operatorname{ár\,Ch} \xi \cdot \vec{i}$$

7.—Resumen

Los vectores trigonométricos $\cos \vec{v}$ y $\operatorname{sen} \vec{v}$ constituyen una generalización de las funciones trigonométricas circulares que permite abarcar también las funciones hiperbólicas. Como vectores tienen propiedades escalares y vectoriales que hemos desarrollado en el presente estudio.

En función de los vectores fundamentales hemos definido los vectores $\sec \vec{v}$, $\operatorname{cosec} \vec{v}$, $\operatorname{tg} \vec{v}$, $\operatorname{cotg} \vec{v}$ y los vectores inversos que también tienen diversas propiedades escalares y vectoriales. Estas propiedades, coma asimismo las aplicaciones de los vectores trigonométricos en Geometría y Resistencia de Materiales las hemos desarrollado en otro estudio a publicarse próximamente.